Wojciech Grąziewicz

TRANSFORMACJA LAPLACE'A

Skrypt dla studentów politechnik

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt.$$

Centrum Nauczania Matematyki
i Kształcenia na Odległość

Politechnika Gdańska 2015

Skrypt przeznaczony jest głównie dla studentów kierunków elektrycznych, elektroniki oraz automatyki na studiach technicznych. Mogą z niego skorzystać również studenci fizyki technicznej i matematyki stosowanej. Skrypt zakończony jest serią zadań kontrolnych, które student powinien rozwiązać w celu sprawdzenia opanowania przedstawionego materiału.

Wojciech Grąziewicz

Spis treści

1 Definicja i własności przekształcenia Laplace'a

Rozpatrzmy funkcję zespoloną $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ argumentu rzeczywistego czyli funkcję

$$\mathbb{R} \ni t \longmapsto f(t) = f_1(t) + i f_2(t) \in \mathbb{C},$$

gdzie f_1 i f_2 są funkcjami rzeczywistymi zmiennej rzeczywistej. Jeżeli obie funkcje f_1 i f_2 są funkcjami całkowalnymi na każdym przedziale $\langle 0; r \rangle$, $r \geqslant 0$, to możemy zdefiniować

$$\int_0^\infty f(t)\,dt = \lim_{r\to\infty} \int_0^r f(t)\,dt = \lim_{r\to\infty} \int_0^r f_1(t)\,dt + i \lim_{r\to\infty} \int_0^r f_2(t)\,dt.$$

Jeżeli obie granice po prawej stronie istnieją i są właściwe to mówimy, że całka $\int_0^\infty f(t)\,dt$ jest zbieżna. Jeżeli któraś z tych granic nie istnieje lub jest niewłaściwa, to całka jest rozbieżna. Jeżeli zbieżna jest całka $\int_0^\infty |f(t)|\,dt = \int_0^\infty \sqrt{f_1^2(t) + f_2^2(t)}\,dt$, to mówimy, że całka $\int_0^\infty f(t)\,dt$ jest zbieżna bezwzględnie. Zachodzi przy tym nierówność

$$\left| \int_0^\infty f(t)\,dt \right| \leqslant \int_0^\infty |f(t)|\,dt.$$

Definicja 1.1 Niech $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{C}$ będzie funkcją całkowalną na każdym przedziale $\langle 0; r \rangle$, $r \geqslant 0$. Transformatą Laplace'a funkcji f nazywamy funkcję zespoloną F argumentu zespolonego, określoną wzorem

$$F(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt. \tag{1}$$

Piszemy wówczas

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)].$$

Mamy zatem

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt.$$

Całka występująca we wzorze (1) (zwana całką Laplace'a) jest całką zależną od parametru zespolonego s. Dla pewnych wartości s może ona być zbieżna, dla innych zbieżna bezwzględnie, a dla jeszcze innych rozbieżna.
Ważną klasą funkcji, dla których całka Laplace'a jest zbieżna, jest klasa funkcji zwanych oryginałami. Ograniczymy się tutaj do oryginałów, które są funkcjami rzeczywistymi (choć w ogólnym przypadku mogą to być funkcje zespolone).

Definicja 1.2 *Oryginałem* nazywamy funkcję $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ spełniającą następujące warunki:

1° $f(t) = 0$ dla każdego $t < 0$;

2° w każdym przedziale $\langle t_1; t_2 \rangle$, $0 \leqslant t_1 < t_2$, funkcja f ma skończoną liczbę punktów nieciągłości i każdy z nich jest punktem nieciągłości pierwszego rodzaju;

3° funkcja f jest rzędu wykładniczego, czyli

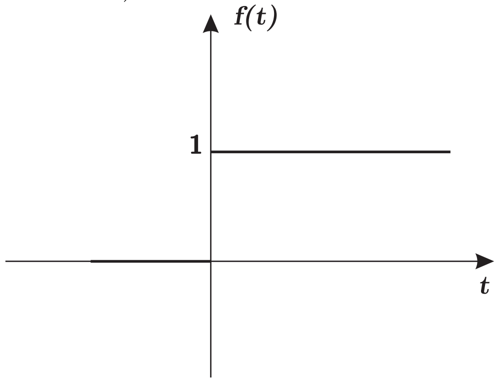
$$\exists_{M>0}\exists_{\lambda\geqslant 0}\forall_{t\in\langle 0;\infty)}\ |f(t)|\leqslant Me^{\lambda t}.$$

Najmniejszą stałą λ spełniającą warunek 3° będziemy oznaczać przez λ_0 i nazywać *współczynnikiem wzrostu wykładniczego oryginału f.*

Przykłady oryginałów:

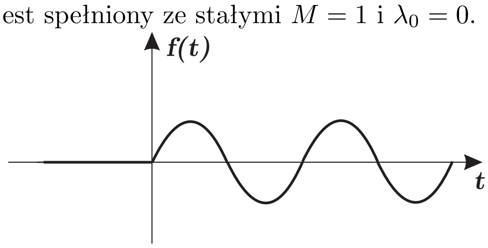
a) Funkcja Heviside'a (funkcja jednostkowa)

$$\mathbf{1}(t)=\begin{cases}0 & \text{dla}\quad t<0\\ 1 & \text{dla}\quad t>0,\end{cases}$$



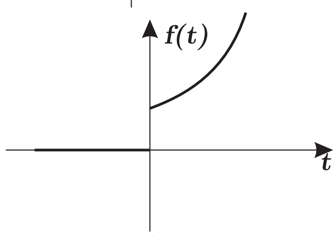
Dla tej funkcji warunek 3° jest spełniony ze stałymi $M=1$ i $\lambda_0=0$.

b) $f(t)=\mathbf{1}(t)\cdot\sin t$



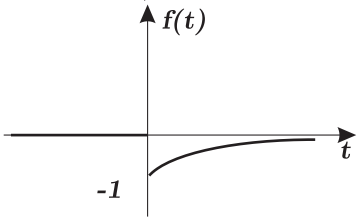
$M=1,\ \lambda_0=0;$

c) $f(t)=2\cdot\mathbf{1}(t)e^{\frac{1}{2}t}$



$M=2,\ \lambda_0=\frac{1}{2};$

d) $f(t)=-\mathbf{1}(t)e^{-2t}$



$M=1,\ \lambda_0=0.$

Zauważymy na przykład, że funkcja $g(t)=\sin t$, nie jest oryginałem ponieważ nie spełnia warunku 1°. Jeżeli jednak funkcja $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ spełnia warunki 2° i 3°, to funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, gdzie $f(t)=\mathbf{1}(t)\cdot g(t)$ jest już oryginałem. W dalszym ciągu, jeżeli to nie będzie prowadziło do nieporozumień, będziemy w zapisie oryginału pomijali czynnik $\mathbf{1}(t)$ traktując na przykład funkcję $f(t) = \sin t$ jako oryginał $f(t) = \mathbf{1}(t) \cdot \sin t$. W szczególności każda funkcja ograniczona spełniająca warunek 2°, jest oryginałem ze stałą $\lambda_0 = 0$.

Łatwo wykazać, że jeśli $f(t)$ i $g(t)$ są oryginałami, to funkcja $h(t) = af(t) + bg(t)$, $a, b \in \mathbb{R}$, też jest oryginałem (a to oznacza, że zbiór oryginałów stanowi przestrzeń liniową nad ciałem liczb rzeczywistych).

Uzasadnimy teraz podstawowy

Fakt. *Jeżeli f jest oryginałem, to całka Laplace'a* $\displaystyle\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$ *jest zbieżna dla* $s \in D$, *gdzie* $D = \{s \in \mathcal{C} :\ \mathrm{Re}(s) > \lambda_0\}$ *i* λ_0 *jest współczynnikiem wzrostu wykładniczego oryginału* f.

D o w ó d: Pokażemy, że całka $\int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt$ jest zbieżna bezwzględnie. Istotnie, niech
$|f(t)| \leqslant Me^{\lambda_0 t}$ i niech $s = \lambda + i\omega$. Wtedy
$|f(t)e^{-st}| = |f(t)| \cdot \left|e^{-st}\right| \leqslant Me^{\lambda_0 t}\left|e^{-\lambda t - i\omega t}\right| = Me^{\lambda_0 t}e^{-\lambda t} = Me^{(\lambda_0 - \lambda)t}$.

Ponieważ całka niewłaściwa $\int_0^\infty e^{at}dt$ jest zbieżna wtedy i tylko wtedy gdy $a < 0$, więc całka $\int_0^\infty Me^{(\lambda_0-\lambda)t}dt$ jest zbieżna dla $\lambda > \lambda_0$. Stąd, na mocy kryterium porównawczego, całka $\int_0^\infty |f(t)e^{-st}|\,dt$ jest zbieżna, a co za tym idzie całka $\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$ jest zbieżna bezwzględnie dla $\mathrm{Re}(s) = \lambda > \lambda_0$. □

Z powyższego faktu wynika, że transformata $F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$ oryginału f jest określona dla każdego $s \in D$. Obszar D jest więc dziedziną funkcji F. Okazuje się, że transformata $F(s)$ ma w obszarze D dodatkowe własności. Zachodzi bowiem

Twierdzenie 1.1 *Jeżeli $f(t)$ jest oryginałem, a $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$, to F jest funkcją holomorficzną w obszarze $D = \{s \in \mathcal{C} : \mathrm{Re}(s) = \lambda > \lambda_0\}$. Dodatkowo* $\lim_{\lambda\to\infty} F(s) = 0$.

Funkcja holomorficzna dla funkcji o wartościach zespolonych jest odpowiednikiem funkcji analitycznej (czyli takiej, którą można rozwinąć w szereg Taylora) dla funkcji o wartościach rzeczywistych. Ponadto warunek $\lim_{Re(s)\to\infty} F(s) = 0$ orzeka, że każda funkcja zespolona, która nie spełnia tego warunku nie może być transformatą oryginału f. W szczególności funkcje wymierne zmiennej s, w których stopień licznika jest większy bądź równy stopniowi mianownika nie są transformatami żadnych oryginałów.

Podamy teraz kilka przykładów wyznaczania transformaty.

Przykład 1.1 Wyznaczyć transformatę funkcji jednostkowej.
R o z w i ą z a n i e :

$$\mathcal{L}[\mathbf{1}(t)] = \int_0^\infty e^{-st}dt = \lim_{r\to\infty}\int_0^r e^{-st}dt = \lim_{r\to\infty}\left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_0^r = \frac{1}{s}\lim_{r\to\infty} e^{-sr} + \frac{1}{s}.$$

Pokażemy, że $\lim\limits_{r\to\infty} e^{-sr} = 0$. Wystarczy pokazać, że $\lim\limits_{r\to\infty}\left|e^{-sr}\right| = 0$. Istotnie

$\left|e^{-sr}\right| = \left|e^{-(\lambda+i\omega)r}\right| = e^{-r\lambda}$. Ponieważ dla oryginału $\mathbf{1}(t)$ jest $\lambda_0 = 0$, więc dla $\lambda > \lambda_0 = 0$ mamy $\lim\limits_{r\to\infty} e^{-r\lambda} = 0$.

Ostatecznie

$$\boxed{\mathcal{L}[\mathbf{1}(t)] = \frac{1}{s}}$$

Dopuszczalny jest również skrócony zapis dla powyższych obliczeń:

$$\int_0^\infty e^{-st}dt = -\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_0^\infty = 0 + \frac{1}{s} = \frac{1}{s}.$$

Przykład 1.2 Wyznaczyć transformatę oryginału $f(t) = e^{at}, a \in \mathbb{R}$.
R o z w i ą z a n i e :

$$\mathcal{L}[e^{at}] = \int_0^\infty e^{at}e^{-st}dt = \int_0^\infty e^{(a-s)t}dt = \frac{1}{a-s}e^{(a-s)t}\Big|_0^\infty = 0 - \frac{1}{a-s} = \frac{1}{s-a}.$$

Pominęliśmy uzasadnienie faktu, że dla $\mathrm{Re}(s) > \lambda_0 = a$ jest $\lim_{r\to\infty} e^{(a-s)r} = 0$. Argumentacja podobna jest do tej z poprzedniego przykładu
Otrzymaliśmy wzór

$$\boxed{\mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a}}$$

Przykład 1.3 Obliczyć transormatę funkcji $f(t) = \sin t$.
R o z w i ą z a n i e : Mamy

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\sin t] &= \int_0^\infty \sin t\, e^{-st}dt \;\left|\begin{array}{ll} u = e^{-st} & v' = \sin t \\ u' = -se^{-st} & v = -\cos t \end{array}\right| \\
&= -\cos t\, e^{-st}\Big|_0^\infty - s\int_0^\infty \cos t\, e^{-st}dt \;\left|\begin{array}{ll} u = e^{-st} & v' = \cos t \\ u' = -se^{-st} & v = \sin t \end{array}\right| \\
&= -\cos t\, e^{-st}\Big|_0^\infty - s\left[\sin te^{-st}\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty \sin te^{-st}dt\right] = \\
&= -\cos t\, e^{-st}\Big|_0^\infty - s\sin t\, e^{-st}\Big|_0^\infty - s^2\int_0^\infty \sin te^{-st}dt.
\end{aligned}$$

Stąd

$$(1+s^2)\int_0^\infty \sin t\, e^{-st}dt = e^{-st}(-s\sin t - \cos t)\Big|_0^\infty = \underbrace{\lim_{r\to\infty}\left[e^{-sr}(-s\sin r - \cos r)\right]}_{0 \;\; (\text{gdy } \mathrm{Re}(s)>0)} + 1.$$

Zatem

$$\boxed{\mathcal{L}[\sin t] = \int_0^\infty \sin t\, e^{-st}dt = \frac{1}{s^2+1}}$$

Własności transformaty Laplace'a

Podamy teraz podstawowe własności transformaty Laplace'a. Łatwe dowody tych własności pominiemy. Zilustrujemy tylko każdą z nich prostymi przykładami. W dalszym ciągu zakładamy, że $f(t)$ jest oryginałem, a $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ – jego transformatą.

1. Liniowość transformaty
Dla dowolnych oryginałów f i g oraz dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$ mamy

$$\boxed{\mathcal{L}[af(t) + bg(t)] = a\mathcal{L}[f(t)] + b\mathcal{L}[g(t)]}$$

Przykład: $\mathcal{L}[2 - \sin t + 3e^{-t}] = \dfrac{2}{s} - \dfrac{1}{s^2+1} + \dfrac{3}{s+1}.$

2. Twierdzenie o podobieństwie

$$\boxed{\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right),\ a > 0}$$

Przykład: $\mathcal{L}[\sin at] = \dfrac{1}{a}\dfrac{1}{(\frac{s}{a})^2+1}$, stąd

$$\boxed{\mathcal{L}[\sin at] = \frac{a}{s^2+a^2}}$$

3. Różniczkowanie oryginału

Jeżeli $f(t), f'(t),\ f''(t),\ \ldots, f^{(n)}(t)$ są oryginałami, to

$$\boxed{\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^nF(s) - s^{n-1}f(0+) - s^{n-2}f'(0+) - \ldots - f^{(n-1)}(0+)}$$

w szczególności

$$\boxed{\mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0+)}$$

oraz

$$\boxed{\mathcal{L}[f''(t)] = s^2F(s) - sf(0+) - f'(0+)}$$

Przykład: $\mathcal{L}[\cos at] = \mathcal{L}[\left(\dfrac{1}{a}\sin at\right)'] = \dfrac{1}{a}\mathcal{L}[(\sin at)'] = \dfrac{1}{a}\left(s\dfrac{a}{s^2+a^2} - \sin(0+)\right).$

Zatem

$$\boxed{\mathcal{L}[\cos at] = \frac{s}{s^2+a^2}}$$

4. Różniczkowanie transformaty

$$\boxed{\mathcal{L}[(-1)^nt^nf(t)] = F^{(n)}(s)}$$

w szczególności

$$\boxed{\mathcal{L}[tf(t)] = -F'(s)}$$

Przykłady:

$\mathcal{L}[t\sin 2t] = -\left(\dfrac{2}{s^2+4}\right)' = \dfrac{4s}{(s^2+4)^2}.$

$\mathcal{L}[t^2e^{3t}] = \left(\dfrac{1}{s-3}\right)'' = \dfrac{2}{(s-3)^3}.$

$\mathcal{L}[t] = \mathcal{L}[t\mathbf{1}(t)] = -\left(\dfrac{1}{s}\right)' = \dfrac{1}{s^2}.$

$\mathcal{L}[t^2] = \mathcal{L}[t\cdot t] = -\left(\dfrac{1}{s^2}\right)' = \dfrac{2}{s^3}.$

Ogólnie mamy:

$$\boxed{\mathcal{L}[t^n] = \frac{(n)!}{s^{n+1}}}$$

5. Przesunięcie w argumencie oryginału

$$\boxed{\mathcal{L}[f(t-a)\mathbf{1}(t-a)] = F(s)e^{-as},\ a > 0}$$

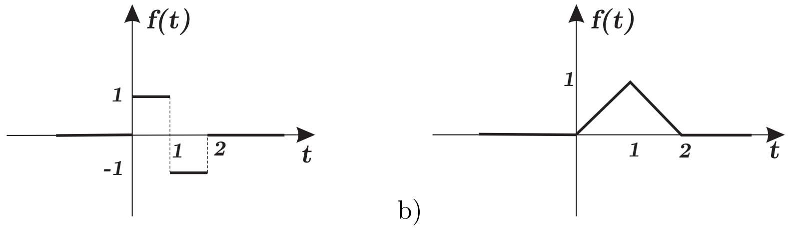
Przykłady:

$\mathcal{L}[(t-1)^2\mathbf{1}(t-1)] = \dfrac{2}{s^3}e^{-s}$.

$\mathcal{L}[\cos 3(t-2)\mathbf{1}(t-2)] = \dfrac{s}{s^2+9}e^{-2s}$.

$\mathcal{L}[t\mathbf{1}(t-3)] = \mathcal{L}[(t-3)\mathbf{1}(t-3)] + 3\mathcal{L}[\mathbf{1}(t-3)] = \dfrac{1}{s^2}e^{-3s} + \dfrac{3}{s}e^{-3s}$.

Przykład 1.4 Wyznaczyć transformaty Laplace'a funkcji przedstawionych na wykresach



a) b)

R o z w i ą z a n i e :

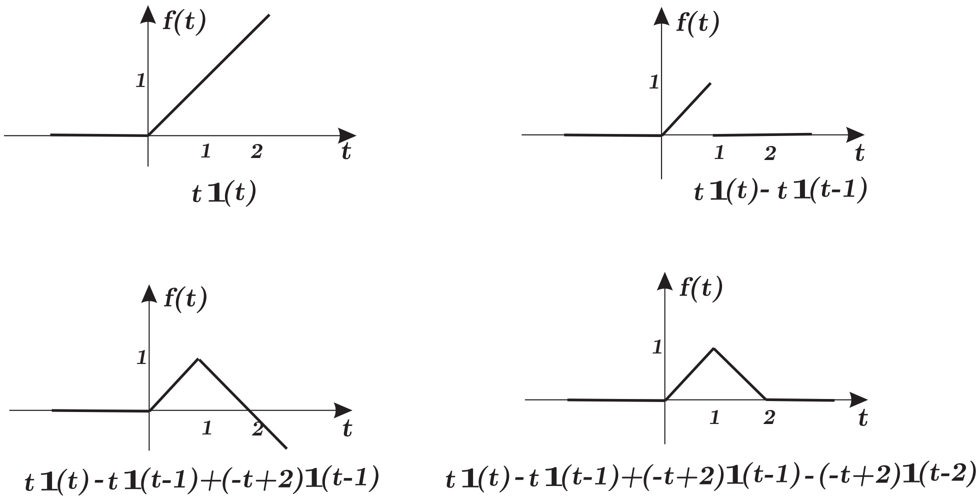
a) Funkcję f zapiszemy za pomocą funkcji Heviside'a:

$f(t) = \mathbf{1}(t) - 2\cdot\mathbf{1}(t-1) + \mathbf{1}(t-2)$.

Stąd

$\mathcal{L}[f(t)] = \dfrac{1}{s} - \dfrac{2}{s}e^{-s} + \dfrac{1}{s}e^{-2s}$.

b) Na poniższych rysunkach pokazane są kolejne etapy prowadzące do wyrażenia funkcji f za pomocą funkcji jednostkowej Heviside'a



Zatem

$$\begin{aligned} f(t) &= t\mathbf{1}(t) - t\mathbf{1}(t-1) + (-t+2)\mathbf{1}(t-1) - (-t+2)\mathbf{1}(t-2) \\ &= t\mathbf{1}(t) - 2(t-1)\mathbf{1}(t-1) + (t-2)\mathbf{1}(t-2). \end{aligned}$$

Stąd na podstawie własności 5 oraz pamiętając, że $\mathcal{L}[t] = \frac{1}{s^2}$, mamy

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{s^2} - \frac{2}{s^2}e^{-s} + \frac{1}{s^2}e^{-2s}.$$

6. Przesunięcie w argumencie transformaty

Obliczymy transformatę funkcji $e^{s_0t}f(t),\ s_0 \in \mathcal{C}$.

$\mathcal{L}[e^{s_0t}f(t)] = \int_0^t e^{s_0t}f(t)e^{-st}dt = \int_0^t e^{-(s-s_0)}f(t)dt = F(s-s_0)$. Zatem

$$\boxed{\mathcal{L}[e^{s_0t}f(t)] = F(s-s_0),\ s_0 \in \mathcal{C}}$$

Przykłady:

$$\mathcal{L}[t\,e^{2t}] = \frac{1}{(s-2)^2}.$$

$$\mathcal{L}[t^2\,e^{-t}] = \frac{2}{(s+1)^3}.$$

$$\mathcal{L}[e^{\lambda t}\sin\omega t] = \frac{\omega}{(s-\lambda)^2+\omega^2}.$$

$$\mathcal{L}[e^{\lambda t}\cos\omega t] = \frac{s-\lambda}{(s-\lambda)^2+\omega^2}.$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[e^{-3t}\sin^2 t] &= \mathcal{L}[e^{-3t}\cdot\frac{1}{2}(1-\cos 2t)] = \frac{1}{2}\mathcal{L}[e^{-3t}] - \frac{1}{2}\mathcal{L}[e^{-3t}\cos 2t] \\ &= \frac{1}{2(s+3)} - \frac{s+3}{2[(s+3)^2+4]}. \end{aligned}$$

7. Całkowanie oryginału

$$\boxed{\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right] = \frac{F(s)}{s}}$$

Istotnie:

Niech $g(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau$. Wtedy $g'(t) = f(t)$ oraz $sG(s) - g(0) = F(s)$. Ponieważ $g(0) = 0$, więc $sG(s) = F(s)$ i stąd $G(s) = \frac{F(s)}{s}$.

Przykład: $\mathcal{L}\left[\int_0^t e^{3\tau}\cos 2\tau d\tau\right] = \frac{s-3}{s[(s-3)^2+4]}$.

Podamy teraz zestawienie najczęściej stosowanych wzorów związanych z transformacją Laplace'a

Lp.	$f(t)$	$F(s)$	Lp.	$f(t)$	$F(s)$
1	$\mathbf{1}(t)$	$\frac{1}{s}$	8	$f(at)$	$\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$
2	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	9	$f'(t)$	$sF(s)-f(0+)$
3	$\sin at$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	10	$f''(t)$	$s^2F(s)-sf(0+)-f'(0+)$
4	$\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2}$	11	$tf(t)$	$-F'(s)$
5	$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	12	$t^2f(t)$	$F''(s)$
6	$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$	13	$f(t-a)\mathbf{1}(t-a),\ a>0$	$F(s)e^{-as}$
7	$t^n,\ n\in\mathbb{N}$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	14	$e^{s_0t}f(t),\ s_0\in\mathcal{C}$	$F(s-s_0)$

2 Przekształcenie odwrotne do przekształcenia Laplace'a

Transformacja Laplace'a jest przekształceniem, które pewnym funkcjom f zmiennej rzeczywistej t przyporządkowuje funkcje F zmiennej zespolonej s. Zapisujemy to wówczas $F(s)=\mathcal{L}[f(t)]$. Powstaje pytanie, czy istnieje odwzorowanie odwrotne do przekształcenia Laplace'a. Z definicji transformaty $F(s)$ wynika, że jeśli dwa oryginały $f(t)$ i $g(t)$ różnią się w skończonej liczbie punktów, to ich transformaty $F(s)$ i $G(s)$ będą identyczne. Podamy następujące

Twierdzenie 2.1 *Jeżeli f jest oryginałem, a funkcja F zmiennej zespolonej $s=\lambda+i\omega$ jest transformatą Laplace'a funkcji f, to w każdym punkcie t zachodzi wzór*

$$\frac{f(t-)+f(t+)}{2}=\frac{1}{2\pi i}\lim_{\omega\to\infty}\int_{\lambda-i\omega}^{\lambda+i\omega}F(s)e^{st}ds, \tag{2}$$

gdzie $\lambda>\lambda_0$ a λ_0 jest współczynnikiem wzrostu wykładniczego oryginału f.

Z twierdzenia tego wynika, że w każdym punkcie t, w którym oryginał f jest ciągły, prawa strona wzoru (2) jest równa $f(t)$, natomiast w punktach nieciągłości funkcji f, prawa strona tego wzoru jest równa średniej arytmetycznej granic jednostronnych funkcji f w tym punkcie. Z tego powodu w dalszym ciągu jeśli oryginał $f(t)$ w jakimś punkcie jest nieciągły, to będziemy przyjmować, że w tym punkcie przyjmuje on wartość równą średniej arytmetycznej granic jednostronnych funkcji (choć nie będziemy tego zaznaczać na wykresie funkcji). Zgodnie z tą umową np.

$$\mathbf{1}(0)=\frac{\mathbf{1}(0-)+\mathbf{1}(0+)}{2}=\frac{0+1}{2}=\frac{1}{2}.$$

Definicja 2.1 Przekształceniem odwrotnym do przekształcenia Laplace'a nazywamy przekształcenie określone wzorem

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\omega \to \infty} \int_{\lambda - i\omega}^{\lambda + i\omega} F(s) e^{st} ds$$

Jeżeli oryginał f w swoich punktach nieciągłości ma wartość równą średniej arytmetycznej skoku w tym punkcie, to zachodzi

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t) \Longleftrightarrow \mathcal{L}[f(t)] = F(s).$$

Przy wyznaczaniu oryginału, gdy znana jest jego transformata, korzystamy z wzorów z tabeli transformat. Na przykład $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2-2}\right) = \cosh\sqrt{2}t$, bo na podstawie wzoru 6 jest $\mathcal{L}\left(\cosh\sqrt{2}t\right) = \frac{s}{s^2-2}$.

Przekształcenie $\mathcal{L}^{-1}$, podobnie jak przekształcenie $\mathcal{L}$ jest przekształceniem liniowym. Mamy więc równości

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}[aF(s) + bG(s)] = a\mathcal{L}^{-1}[F(s)] + b\mathcal{L}^{-1}[G(s)] = af(t) + bg(t)}$$

Przykład 2.1 Obliczyć $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$, jeśli $F(s) = \frac{s^2+s+1}{s^3+s}$.

R o z w i ą z a n i e :
Funkcję F rozkładamy na ułamki proste,

$$\frac{s^2+s+1}{s(s^2+1)} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2+1}.$$

Stąd

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2+1}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) = 1 + \sin t.$$

Zatem $f(t) = 1 + \sin t$. W zasadzie powinniśmy napisać $f(t) = (1 + \sin t)\mathbf{1}(t)$, jednak zgodnie z wcześniejszą umową czynnik $\mathbf{1}(t)$ pomijamy.

Przykład 2.2 Wiedząc, że $F(s) = \frac{s}{s^2+4s+5}$, znaleźć oryginał $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$.

R o z w i ą z a n i e :
Trójmian kwadratowy w mianowniku doprowadzamy do postaci kanonicznej. Otrzymamy

$$F(s) = \frac{s}{(s+2)^2+1}.$$

Następnie otrzymaną funkcję przekształcamy tak, aby można było skorzystać z wzoru 14 w połączeniu z wzorami 3 i 4.

$$F(s) = \frac{s+2-2}{(s+2)^2+1} = \frac{s+2}{(s+2)^2+1} + \frac{2}{(s+2)^2+1}.$$

Stąd na podstawie wspomnianych wzorów mamy

O d p o w i e d ź : $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s+2}{(s+2)^2+1} + \frac{2}{(s+2)^2+1}\right) = e^{-2t}\cos t + 2e^{-2t}\sin t.$

3 Zastosowania przekształcenia Laplace'a

Transformacja Laplace'a jest dogodnym narzędziem pomocnym w rozwiązywaniu równań różniczkowych liniowych. Zaczniemy od następującego przykładu

Przykład 3.1 Rozwiązać zagadnienie początkowe

$$\begin{cases} x' + x = e^{-t}, \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

R o z w i ą z a n i e :

Jest to równanie różniczkowe liniowe rzędu pierwszego z niewiadomą funkcją x zmiennej niezależnej t. Założymy, że funkcja x jest oryginałem. Niech $\mathcal{L}[x(t)] = X(s)$. Wtedy $x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)]$. Zgodnie ze wzorem 5 z tabeli na str. 9 mamy

$\mathcal{L}[x'(t)] = sX(s) - x(0+) = sX(s) - 1$

Stosujemy transformatę Laplace'a do obu stron danego równania (transformujemy obie strony równania). Otrzymujemy

$sX(s) - 1 + X(s) = \dfrac{1}{s+1}.$

Stąd

$(s+1)X(s) = 1 + \dfrac{1}{s+1}$

oraz

$X(s) = \dfrac{1}{s+1} + \dfrac{1}{(s+1)^2}.$

Zatem

$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{s+1}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{(s+1)^2}\right) = e^{-t} + te^{-t}.$

O d p o w i e d ź:

$x(t) = (1+t)e^{-t}.$

Stosując transformatę Laplace'a do obu stron równania, przekształciliśmy dane równanie różniczkowe z niewiadomą funkcją x, w równanie algebraiczne z niewiadomą funkcją X. Wyznaczyliśmy z tego przekształconego równania funkcję X, a następnie stosując transformatę odwrotną $\mathcal{L}^{-1}$ do funkcji X, otrzymaliśmy oryginał x, który jest rozwiązaniem danego zagadnienia.

Przykład 3.2 Znaleźć rozwiązanie zagadnienia początkowego

$$\begin{cases} x'' - 2x' = e^{2t} \\ x(0) = x'(0) = 0. \end{cases}$$

R o z w i ą z a n i e : Korzystając z wzorów 10, 9 i 2 otrzymujemy

$\mathcal{L}[x''] = s^2X(s) - sx(0) - x'(0) = s^2X(s),$

$\mathcal{L}[x'] = sX(s) - x(0) = sX(s),$

$\mathcal{L}[e^{2t}] = \dfrac{1}{s-2}.$

Transformujemy obie strony danego równania:

$\mathcal{L}[x'' - 2x'] = \mathcal{L}[e^{2t}]$

$s^2X(s) - 2sX(s) = \dfrac{1}{s-2}.$

Stąd

$X(s) = \dfrac{1}{s(s-2)^2}.$

Zatem

$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{s(s-2)^2}\right).$

Rozkładamy funkcję $X(s)$ na ułamki proste i otrzymujemy

$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{4s} - \dfrac{1}{4(s-2)} + \dfrac{1}{2(s-2)^2}\right).$

O d p o w i e d ź : $x(t) = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4}e^{2t} + \dfrac{1}{2}te^{2t}.$

Przy wyznaczaniu transformaty odwrotnej skorzystaliśmy ze wzorów: 1, 2 i 14 w połączeniu ze wzorem 7 z tabeli transformat ze strony 9.

Rozwiązanie równań z powyższych dwóch przykładów, gdzie prawe strony są funkcjami ciągłymi, można było łatwo uzyskać klasycznymi metodami znanymi z kursu równań różniczkowych. W przypadku, gdy po prawej stronie równania występuje funkcja, która nie jest ciągła klasyczne metody zawodzą i wtedy transformacja Laplace'a jest skutecznym narzędziem. Zilustrujemy to kolejnym przykładem.

Przykład 3.3 Rozwiązać zagadnienie

$$\begin{cases} x'' + x = t\mathbf{1}(t-1) \\ x(0) = 0, \quad x'(0) = 1. \end{cases}$$

R o z w i ą z a n i e :

Prawą stronę równania przekształcamy do postaci

$t\mathbf{1}(t-1) = [1 + (t-1)]\mathbf{1}(t-1) = \mathbf{1}(t-1) + (t-1)\mathbf{1}(t-1).$

Transformujemy teraz obie strony równania:

$\mathcal{L}[x'' + x] = \mathcal{L}[\mathbf{1}(t-1) + (t-1)\mathbf{1}(t-1)].$

Zatem

$s^2X(s) - sx(0) - x'(0) + X(s) = \dfrac{1}{s}e^{-s} + \dfrac{1}{s^2}e^{-s}.$

Uwzględniając warunki początkowe, mamy

$s^2X(s) - 1 + X(s) = \dfrac{1}{s}e^{-s} + \dfrac{1}{s^2}e^{-s}.$

Stąd

$X(s) = \dfrac{1}{s^2+1} + \dfrac{1}{s(s^2+1)}e^{-s} + \dfrac{1}{s^2(s^2+1)}e^{-s}.$

Zatem

$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{s^2+1} + \dfrac{1}{s(s^2+1)}e^{-s} + \dfrac{1}{s^2(s^2+1)}e^{-s}\right).$

Korzystamy teraz z liniowości transformaty odwrotnej i dostajemy

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s(s^2+1)}e^{-s}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2(s^2+1)}e^{-s}\right).$$

Wyznaczamy poszczególne składniki funkcji x. Otrzymujemy kolejno:

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) = \sin t \cdot \mathbf{1}(t).$$

Funkcję wymierną $\dfrac{1}{s(s^2+1)}$ rozkładamy na ułamki proste:

$$\frac{1}{s(s^2+1)} = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1},$$

a stąd

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s(s^2+1)}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1}\right) = 1 - \cos t$$

oraz, na podstawie wzoru 13,

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s(s^2+1)}e^{-s}\right) = [1-\cos(t-1)]\mathbf{1}(t-1).$$

Analogicznie

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2(s^2+1)}e^{-s}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left[\left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1}\right)e^{-s}\right] = [(t-1)^2 - \sin(t-1)]\mathbf{1}(t-1).$$

Zatem rozwiązaniem danego zagadnienia jest

O d p o w i e d ź : $x(t) = \sin t\,\mathbf{1}(t) + [1-\cos(t-1)]\mathbf{1}(t-1) + [(t-1)^2 - \sin(t-1)]\mathbf{1}(t-1)$.
Rozwiązanie x, jak się okazuje jest funkcją ciągłą.

Przykład 3.4 Rozwiązać, metodą transformacji Laplace'a, układ równań z zadanymi warunkami początkowymi

$$\begin{cases} x' + y' + y = e^t \\ 2x' + y' + 2y = \cos t \\ x(0) = y(0) = 0. \end{cases}$$

R o z w i ą z a n i e :

Zakładamy, że niewiadome funkcje x i y są oryginałami o transformatach odpowiednio X i Y. Transformujemy oba równania:

$$\begin{cases} sX(s) + sY(s) + Y(s) = \dfrac{1}{s-1}, \\ 2sX(s) + sY(s) + 2Y(s) = \dfrac{s}{s^2+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} sX(s) + (s+1)Y(s) = \dfrac{1}{s-1}, \\ 2sX(s) + (s+2)Y(s) = \dfrac{s}{s^2+1}. \end{cases}$$

Otrzymaliśmy układ równań algebraicznych z niewiadomymi $X(s)$ i $Y(s)$. Rozwiązując ten liniowy układ otrzymujemy

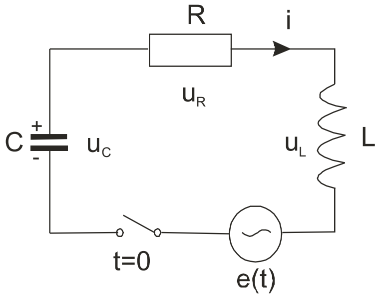
$$\begin{cases} X(s) = -\dfrac{s+2}{s^2(s-1)} + \dfrac{s+1}{s(s^2+1)} = \dfrac{4}{s} + \dfrac{2}{s^2} - \dfrac{3}{s-1} + \dfrac{1}{s^2+1} - \dfrac{s}{s^2+1}, \\ Y(s) = -\dfrac{1}{s^2+1} + \dfrac{2}{s(s-1)} = -\dfrac{2}{s} + \dfrac{2}{s-1} - \dfrac{1}{s^2+1}. \end{cases}$$

Stąd

O d p o w i e d ź : $\begin{cases} x(t) = 4 + 2t - 3e^t + \sin t - \cos t \\ y(t) = -2 + 2e^t - \sin t. \end{cases}$

Ważnymi przykładami zastosowań transformacji Laplace'a są zastosowania w dziedzinie elektrotechniki. Pokażemy jak wyprowadzić i rozwiązać równanie wyrażające zmianę natężenia prądu w typowym obwodzie zawierającym cewkę, opornik i kondensator.

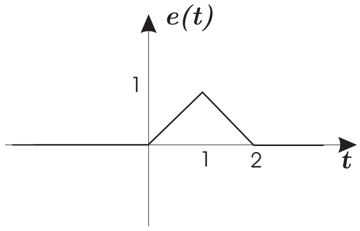
Przykład 3.5 Obwód elektryczny składa się ze źródła prądu o SEM równej $e = e(t)$, cewki o indukcyjności L, oporu R i kondensatora o pojemności C.



Znaleźć natężenie prądu $i = i(t)$ jako funkcję czasu t, jeżeli w chwili początkowej $t = 0$ natężenie w obwodzie oraz ładunek są równe zero. Wykonać obliczenia gdy $R = 2[\Omega]$, $L = 1[H]$, $C = 0,2[F]$, a siła elektromotoryczna $e(t)[V]$ zadana jest wzorem:

$$e(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ t, & t \in (0;1), \\ -t+2, & t \in (1;2), \\ 0, & t > 2, \end{cases}$$

której wykres przedstawiony jest na rysunku:



Sporządzić wykres natężenia i korzystając z dowolnego programu do obliczeń symbolicznych.

R o z w i ą z a n i e :
Zgodnie z prawem Kirchoffa, całkowita siła elektromotoryczna w obwodzie równa się sumie spadków napięć na cewce, oporze i kondensatorze,

$$e(t) = u_L + u_R + u_C,$$

gdzie

$$u_L = L\frac{di}{dt}, \qquad u_R = Ri, \qquad u_C = \frac{q}{c}.$$

Napięcie u_C wyznaczymy z zależności

$$\frac{dq(t)}{dt} = i(t),$$

stąd, całkując ten związek w przedziale od 0 do t, otrzymamy

$$q(t) - q(0) = \int_0^t i(s)ds.$$

Ponieważ $q(0) = 0$, więc

$$u_C = \frac{1}{C}\int_0^t i(s)ds.$$

Mamy zatem równanie

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau = e(t). \tag{3}$$

Różniczkując ostatnie równanie obustronnie względem zmiennej t otrzymujemy

$$L\frac{d^2i}{dt} + Ri + \frac{1}{C}i = \frac{de}{dt}.$$

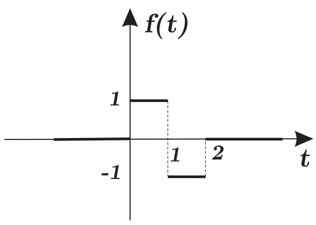
Po podzieleniu przez L i wstawieniu zadanych wartości liczbowych otrzymujemy równanie różniczkowe liniowe rzędu drugiego z niewiadomą funkcją i

$$\frac{d^2i}{dt^2} + 2\frac{di}{dt} + 5i = f(t), \tag{4}$$

gdzie funkcja

$$f(t) = \frac{de}{dt} = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \in (0;1) \\ -1, & t \in (1;2)\,, \\ 0, & t > 2 \end{cases}$$

przedstawiona jest na poniższym wykresie



Zapiszemy jeszcze warunki początkowe:

$$i(0) = 0, \quad \frac{di}{dt}(0) = \frac{e(0)}{L} = 0.$$

Drugi z warunków początkowych otrzymamy wstawiając $t = 0$ do obu stron równania (3). Transformując obustronnie równanie (2) i uwzględniając warunki początkowe, otrzymujemy

$$s^2I(s) + 2sI(s) + 5I(s) = F(s)$$

gdzie $I(s)=\mathcal{L}[i(t)]$, $F(s)=\mathcal{L}[f(t)]=\frac{1}{s}-\frac{2}{s}e^{-s}+\frac{1}{s}e^{-2s}$ (zob. przykład 1.4 a) str. 7).
Mamy zatem

$$(s^2+2s+5)I(s)=\frac{1}{s}-\frac{2}{s}e^{-s}+\frac{1}{s}e^{-2s}$$

i stąd

$$I(s)=\frac{1}{s(s^2+2s+5)}-\frac{2}{s(s^2+2s+5)}e^{-s}+\frac{1}{s(s^2+2s+5)}e^{-2s},$$

a więc

$$i(t)=\mathcal{L}^{-1}\Big[\frac{1}{s(s^2+2s+5)}-\frac{2}{s(s^2+2s+5)}e^{-s}+\frac{1}{s(s^2+2s+5)}e^{-2s}\Big].$$

Funkcję wymierną $\frac{1}{s(s^2+2s+5)}$ rozkładamy na ułamki proste:

$$\frac{1}{s(s^2+2s+5)}=\frac{A}{s}+\frac{Bs+C}{s^2+2s+5},\quad \text{stąd } A=\frac{1}{5},\ B-\frac{1}{5},\ C=-\frac{2}{5}.$$

Zatem

$$\frac{1}{s(s^2+2s+5)}=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{s}-\frac{s+2}{s^2+2s+5}\right).$$

Przekształćmy jeszcze ostatnie wyrażenie do postaci dogodnej do stosowania wzorów z tabeli transformat

$$\frac{1}{5}\left(\frac{1}{s}-\frac{s+2}{(s+1)^2+4}\right)=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{s}-\frac{s+1}{(s+1)^2+4}-\frac{1}{2}\frac{2}{(s+1)^2+4}\right).$$

Mamy zatem kolejno:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2+2s+5)}\right]=\frac{1}{5}\left[1-e^{-t}\cos 2t-\frac{1}{2}e^{-t}\sin 2t\right]\mathbf{1}(t),$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s(s^2+2s+5)}e^{-s}\right]=\frac{2}{5}\left[1-e^{-(t-1)}\cos 2(t-1)-\frac{1}{2}e^{-(t-1)}\sin 2(t-1)\right]\mathbf{1}(t-1),$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2+2s+5)}e^{-2s}\right]=\frac{2}{5}\left[1-e^{-(t-2)}\cos 2(t-2)-\frac{1}{2}e^{-(t-2)}\sin 2(t-2)\right]\mathbf{1}(t-2).$$

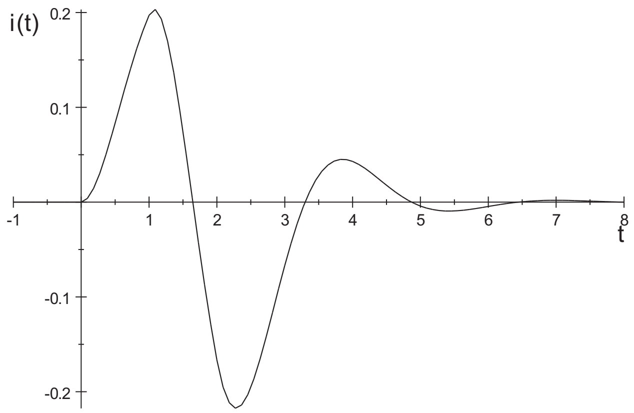
Ostatecznie
O d p o w i e d ź :

$$\begin{aligned} i(t)=&\frac{1}{5}\left[1-e^{-t}\cos 2t-\frac{1}{2}e^{-t}\sin 2t\right]\mathbf{1}(t)\\ &-\frac{2}{5}\left[1-e^{-(t-1)}\cos 2(t-1)-\frac{1}{2}e^{-(t-1)}\sin 2(t-1)\right]\mathbf{1}(t-1)\\ &+\frac{2}{5}\left[1-e^{-(t-2)}\cos 2(t-2)-\frac{1}{2}e^{-(t-2)}\sin 2(t-2)\right]\mathbf{1}(t-2)\end{aligned}$$

lub w tradycyjnym zapisie

$$i(t)=\begin{cases}\frac{1}{5}\left[1-e^{-t}\cos 2t-\frac{1}{2}e^{-t}\sin 2t\right], & t\in(0;1),\\ \frac{2}{5}\left[1-e^{-(t-1)}\cos 2(t-1)-\frac{1}{2}e^{-(t-1)}\sin 2(t-1)\right], & t\in(1;2),\\ \frac{2}{5}\left[1-e^{-(t-2)}\cos 2(t-2)-\frac{1}{2}e^{-(t-2)}\sin 2(t-2)\right], & t\in(2;\infty).\end{cases}$$

Na koniec wykres rozwiązania uzyskany za pomocą programu Scientific Work Place



Uwaga: Transformatę $I(s)$ można też otrzymać bezpośrednio z równania (3) pomijając wyprowadzenie równania różniczkowego (4). Mianowicie, transformując obie strony równania (3) i stosując wzór na całkowanie oryginału (własność 7 ze strony 8) otrzymujemy:

$$LsI(s) + RI(s) + \frac{1}{C} \cdot \frac{I(s)}{s} = E(s).$$

Stąd

$$I(s) = \frac{E(s)}{Ls + R + \frac{1}{sC}}$$

Wstawiając teraz dane zadania oraz korzystając z wyniku z przykładu 1.4 b) na str. 7 otrzymujemy

$$I(s) = \frac{1}{s(s^2 + 2s + 5)} - \frac{2}{s(s^2 + 2s + 5)} e^{-s} + \frac{1}{s(s^2 + 2s + 5)} e^{-2s}.$$

Transformacja Laplace'a stosuje się do równań lub układów równań różniczkowych liniowych w przypadku gdy warunki początkowe stawiane są w punkcie $t_0 = 0$. Na kolejnym przykładzie pokażemy jak sobie radzić, gdy warunek początkowy dany jest w punkcie $t_0 \neq 0$.

Przykład 3.6 Rozwiązać zagadnienie początkowe
$x' + 2x = t, \quad x(2) = 1.$
R o z w i ą z a n i e :
Przez odpowiednią zamianę zmiennych sprowadzimy dane równanie do równoważnego równania z warunkiem początkowym w zerze.
Niech $\tau = t - 2$, wtedy $t = \tau + 2$.
Wprowadźmy teraz nową funkcję niewiadomą $y = y(\tau)$ związaną z funkcją x zależnością
$y(\tau) = x(\tau + 2) = x(t)$. Wówczas $y'(\tau) = x'(\tau + 2) = x'(t)$. Przy tej zamianie zmiennych dane zagadnienie przekształca się w zagadnienie
$y'(\tau) + 2y(\tau) = \tau + 2, \quad \tau(0) = 1$.
Do tego zagadnienia stosujemy transformatę Laplace'a. Otrzymujemu kolejno:
$sY(s) - 1 + 2Y(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{2}{s},$

$Y(s) = \frac{1}{s+2} + \frac{1}{s^2(s+2)} + \frac{1}{s(s+2)}.$

Po rozkładzie funkcji wymiernych na ułamki proste i redukcji wyrazów podobnych dostajemy

$Y(s) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{s+2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{s} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s^2}.$

A więc

$y(\tau) = \frac{1}{4}e^{-2\tau} + \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\tau.$

Wracając teraz do niewiadomej funkcji x zmiennej t otrzymujemy

O d p o w i e d ź :

$x(t) = \frac{1}{4}e^{-2(t-2)} + \frac{3}{4} + \frac{1}{2}(t-2).$

4 Splot funkcji i jego własności

Definicja 4.1 Jeżeli funkcje f i g są funkcjami rzeczywistymi określonymi i całkowalnymi w każdym przedziale $\langle 0; t\rangle$, $t \in (0; \infty)$, to splotem funkcji f i g nazywamy funkcję h określoną następująco

$$h(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\, d\tau,\ t \in (0, \infty).$$

Splot funkcji f i g oznaczamy $f(t) * g(t)$. Mamy zatem

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\, d\tau. \tag{5}$$

Własności splotu:

1° Splot jest operacją przemienną, łączną i rozdzielną względem dodawania.

2° Splot dwóch oryginałów jest oryginałem.

Twierdzenie 4.1 **(Borela)** *Jeżeli f i g są oryginałami to*

$$\mathcal{L}[f(t) * g(t)] = \mathcal{L}[f(t)] \cdot \mathcal{L}[g(t)] = F(s) \cdot G(s).$$

Twierdzenie powyższe orzeka, że *transformata splotu jest równa iloczynowi transformat.*

Zilustrujemy to twierdzenie przykładem

Przykład 4.1 Obliczymy splot funkcji $f(t) = t$ i $g(t) = e^t$. Mamy

$$
\begin{aligned}
t * e^t &= \int_0^t \tau e^{t-\tau} d\tau = e^t \int_0^t \tau e^{-\tau} d\tau = e^t \left(-\tau e^{-\tau} \Big|_0^t - e^{-\tau} \Big|_0^t \right) \\
&= e^t \left(-te^{-t} - e^{-t} + 1 \right) = e^t - t - 1.
\end{aligned}
$$

Zatem

$$\mathcal{L}[t * e^t] = \mathcal{L}[e^t - t - 1] = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} = \frac{s^2 - s + 1 - s(s-1)}{s^2(s-1)} = \frac{1}{s^2(s-1)}.$$

Z drugiej strony, na podstawie twierdzenia Borela mamy:

$$\mathcal{L}[t * e^t] = \mathcal{L}[t] \cdot \mathcal{L}[e^t] = \frac{1}{s^2} \cdot \frac{1}{s-1}.$$

Twierdzenie Borela stosujemy przede wszystkim do wyznaczania transformaty odwrotnej. Korzystamy wówczas z zależności

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s) \cdot G(s)] = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] * \mathcal{L}^{-1}[G(s)] = f(t) * g(t). \tag{6}$$

Przykład 4.2 Wyznaczyć oryginał $f(t)$, gdy znana jest transformata

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \frac{5s}{(s^2+1)(s-1)}.$$

R o z w i ą z a n i e :

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{5s}{(s^2+1)(s-1)} \right) = 5\, \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{s-1} \cdot \frac{s}{s^2+1} \right) \\
&= 5\, \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{s-1} \right) * \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{s}{s^2+1} \right) = 5\, e^t * \cos t = 5 \int_0^t e^{t-\tau} \cos \tau \, d\tau \\
&= 5\, e^t \int_0^t e^{-\tau} \cos \tau \, d\tau = 5\, e^t \left[\frac{1}{2} e^{-\tau} \left(\sin \tau - \cos \tau \right) \Big|_0^t \right] = \frac{5}{2} \left(\sin t - \cos t + e^t \right).
\end{aligned}
$$

Uwaga : Przy wyznaczaniu oryginału $x(t)$ z wykorzystaniem twierdzenia Borela, należało obliczyć uciążliwą rachunkowo całkę $\int_0^t e^{-\tau} \cos \tau \, d\tau$ (szczegóły rachunków pominęliśmy). Ten sam oryginał można było obliczyć przez rozkład funkcji $F(s)$ na ułamki proste, podobnie jak w przykładach 2.1 i 2.2 na str. 10.

Przykład 4.3 Rozwiązać zagadnienie początkowe

$$
\begin{cases}
x(t) + \displaystyle\int_0^t x'(\tau) \cos(t-\tau)\, d\tau = \sin t\, \mathbf{1}(t-\pi), \\
x(0) = 0.
\end{cases}
$$

R o z w i ą z a n i e :

Równanie powyższe jest równaniem różniczkowo-całkowym typu splotowego. Zauważymy, że równanie można przepisać w postaci

$$x(t) + x'(t) * \cos t = -\sin(t-\pi)\, \mathbf{1}(t-\pi).$$

Transformujemy obie strony równania, stosując do lewej strony wzór na transformatę splotu (twierdzenie Borela) i wzór na transformatę pierwszej pochodnej, a do prawej strony, wzór 13 z tabeli transformat. Otrzymujemy kolejno

$$X(s) + sX(s) \cdot \frac{s}{s^2+1} = -\frac{e^{-\pi s}}{s^2+1},$$
$$X(s)\left(1 + \frac{s^2}{s^2+1}\right) = -\frac{e^{-\pi s}}{s^2+1},$$
$$X(s) = \frac{-e^{-\pi s}}{s^2+1} \cdot \frac{s^2+1}{2s^2+1} = \frac{-e^{-\pi s}}{2s^2+1}.$$

Stąd

$$x(t) = -\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{2s^2+1} \cdot e^{-\pi s}\right).$$

Ponieważ

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{2s^2+1}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\sqrt{2}}{2}t\,,$$

więc korzystając znowu ze wzoru 13 na przesunięcie w dziedzinie argumentu, otrzymujemy

O d p o w i e d ź : $x(t) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(t-\pi)\right)\mathbf{1}(t-\pi).$

5 Transformata oryginału okresowego

Załóżmy, że oryginał $f(t)$ jest funkcją okresową dla $t > 0$, tzn. istnieje $T > 0$ takie, że $f(t) = f(t+T)$ dla każdego $t > 0$. Uzasadnimy wzór na transformatę oryginału okresowego:

$$\boxed{\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{1-e^{-Ts}}\int_0^T e^{-st}f(t)dt}$$

Istotnie mamy

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = \int_0^T f(t)e^{-st}dt + \int_T^\infty f(t)e^{-st}dt.$$

W drugiej całce stosujemy podstawienie $t = u + T$ i $dt = du$. Zatem

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^T f(t)e^{-st}dt + \int_0^\infty f(u+T)e^{-s(u+T)}du \\ &= \int_0^T f(t)e^{-st}dt + e^{-sT}\int_0^\infty f(u)e^{-su}du \\ &= \int_0^T f(t)e^{-st}dt + e^{-sT}F(s). \end{aligned}$$

Stąd

$$F(s)\left(1-e^{-sT}\right) = \int_0^T f(t)e^{-st}dt.$$

Ostatecznie

$$F(s) = \frac{1}{1-e^{-Ts}}\int_0^T e^{-st}f(t)dt.$$

Przykład 5.1 Rozwiązać zagadnienie

$$\begin{cases} x'' + x = f(t), \\ x(0 = x'(0) = 0, \end{cases}$$

gdzie f jest oryginałem okresowym określonym wzorem

$$f(t) = \begin{cases} 1 \text{ dla } \ t \in (0, \pi), \\ 0 \ \text{ dla } \ t \in (\pi, 2\pi), \quad f(t + 2\pi) = f(t). \end{cases}$$

R o z w i ą z a n i e : Wyznaczamy najpierw transformatę oryginału f. Korzystamy ze wzoru na transformatę oryginału okresowego o okresie $T = 2\pi$.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(t)] &= \frac{1}{1 - e^{-2\pi s}} \int_0^{2\pi} e^{-st} f(t)\, dt \\ &= \frac{1}{1 - e^{-2\pi s}} \int_0^{\pi} e^{-st} \cdot 1\, dt + \frac{1}{1 - e^{-2\pi s}} \int_{\pi}^{2\pi} e^{-st} \cdot 0\, dt \\ &= \frac{1}{1 - e^{-2\pi s}} \int_0^{\pi} e^{-st}\, dt = \frac{1}{1 - e^{-2\pi s}} \left[-\frac{1}{s} \cdot e^{-st} \right]_0^{\pi} \\ &= -\frac{1}{s} \cdot \frac{1}{1 - e^{-2\pi s}} \left(e^{-\pi s} - 1 \right) \\ &= \frac{1 - e^{-\pi s}}{s\,(1 - e^{-\pi s}) \cdot (1 + e^{-\pi s})} = \frac{1}{s\,(1 + e^{-\pi s})}. \end{aligned}$$

Transformując teraz obie strony równania i uwzględniając warunki początkowe otrzymujemy:

$$s^2 X(s) + X(s) = \frac{1}{s\,(1 + e^{-\pi s})}.$$

Stąd

$$X(s) = \frac{1}{s\,(1 + e^{-\pi s})\,(s^2 + 1)}.$$

Zatem

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s\,(1 + e^{-\pi s})\,(s^2 + 1)} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s\,(1 + e^{-\pi s})} \cdot \frac{1}{s^2 + 1} \right]$$

Zauważymy, że wyrażenie w nawiasie kwadratowym jest iloczynem transformaty naszego oryginału okresowego $f(t)$ i funkcji $\sin t$. Korzystajac z twierdzenia Borela, otrzymujemy

$$x(t) = f(t) \star \sin t = \int_0^t f(\tau) \sin(t - \tau)\, d\tau.$$

Aby obliczyć całkę po prawej stronie ostatniego wzoru, musimy rozpatrzeć przypadki dla t należących do kolejnych przedziałów $(0; \pi)$, $(\pi; 2\pi)$, itd. Mamy zatem

jeśli $t \in (0; \pi)$, to $x(t) = \int_0^t 1 \cdot \sin(t - \tau) d\tau = \cos(t - \tau)\Big|_0^t = 1 - \cos t$,

jeśli $t \in (\pi; 2\pi)$, to $x(t) = \int_0^{\pi} 1 \cdot \sin(t - \tau) d\tau + \int_{\pi}^t 0 \cdot \sin(t - \tau) d\tau = \cos(t - \tau)\Big|_0^{\pi} = -2\cos t$,

jeśli $t \in (2\pi; 3\pi)$, to $x(t) = \int_0^{\pi} \sin(t-\tau) d\tau + \int_{2\pi}^t \sin(t-\tau) d\tau = -2\cos t + 1 - \cos t = 1 - 3\cos t$,

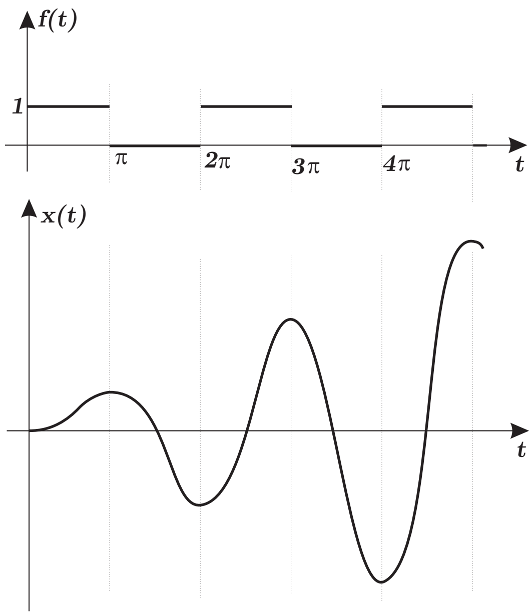
jeśli $t \in (3\pi; 4\pi)$, to $x(t) = \int_0^{\pi} \sin(t-\tau) d\tau + \int_{2\pi}^{3\pi} \sin(t-\tau) d\tau + \int_{3\pi}^t 0 \cdot \sin(t-\tau) d\tau = -4\cos t$

i tak dalej.

Ostatecznie

$$x(t) = \begin{cases} 1 - \cos t, & t \in (0; \pi)\,, \\ -2\cos t, & t \in (\pi; 2\pi)\,, \\ 1 - 3\cos t, & t \in (2\pi; 3\pi)\,, \\ -4\cos t, & t \in (3\pi; 4\pi)\,, \\ \quad\vdots & \end{cases}$$

Interpretacja fizyczna rozwiązania naszego zagadnienia jest następująca. Dane równanie jest równaniem różniczkowym oscylatora bez tłumienia z okresowo działającą siłą f, wymuszającą drgania. Całka ogólna równania jednorodnego $x'' + x = 0$ jest postaci $x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t$, a zatem jest funkcją okresową o okresie 2π. Ponieważ siła f ma też okres 2π, więc następuje zjawisko rezonansu. Wykres oryginału f) i wykres rozwiązania x przedstawiono na rysunku poniżej.

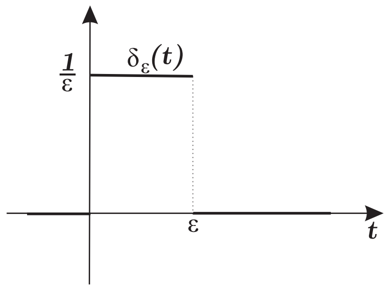


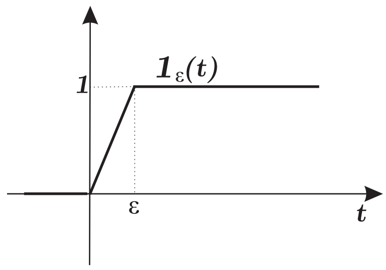
6 Delta Diraca

W zastosowaniach inżynierskich np. w teorii sygnałów i obwodów, w teorii sterowania, rozpatruje się funkcje zmiennej czasowej t (sygnały) o bardzo krótkim okresie działania i bardzo dużej amplitudzie. Zakłada się przy tym, że pole ograniczone osią czasu i wykresem takiego sygnału jest równe 1. Jest wiele możliwych realizacji takich sygnałów. Rozpatrzmy jedną z nich. Weźmy pod uwagę dwie rodziny funkcji $\delta_\varepsilon(t)$ i $\mathbf{1}_\varepsilon(t)$, $\varepsilon > 0$, dane wzorami

$$\delta_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \frac{1}{\varepsilon}, & 0 < t < \varepsilon, \\ 0, & t > \varepsilon \end{cases} \quad \text{oraz} \quad \mathbf{1}_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \frac{t}{\varepsilon}, & 0 < t < \varepsilon, \\ 1, & t > \varepsilon, \end{cases}$$

których wykresy przedstawiono na poniższych rysunkach





Zauważymy, że dla każdego $\varepsilon > 0$ jest

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(t)dt = \int_0^\varepsilon \frac{1}{\varepsilon} dt = 1$$

oraz

$$[\mathbf{1}_\varepsilon(t)]' = \delta_\varepsilon(t)].$$

Gdy ε dąży do zera czas sygnału $\delta_\varepsilon(t)$ jest coraz krótszy i jednocześnie amplituda coraz większa. W granicy otrzymujemy

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \delta_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0, \\ \infty, & t = 0 \end{cases} \quad \lim_{\varepsilon \to \infty} \mathbf{1}_\varepsilon(t) = \mathbf{1}(t) \quad \text{oraz} \quad \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(t)dt = 1 \ .$$

Oznaczmy przez δ sygnał określony wzorem

$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \delta_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0, \\ \infty, & t = 0 \end{cases} .$$

Sygnał $\delta = \delta(t)$ nazywać będziemy *deltą Diraca*. Na całej osi t z wyjątkiem zera przyjmuje on wartość zero, natomiast w samym zerze ma wartość równą nieskończoność. Delta Diraca nie jest w zwykłym sensie funkcją, należy ona do klasy obiektów zwanych pseudofunkcjami lub dystrybucjami. Całkowanie i różniczkowanie dystrybucji odbywa się w pewien uogólniony sposób, jednak podlega podobnym prawom jak całkowanie i różniczkowanie zwykłych funkcji. Możemy zatem zapisać

$$1 = \lim_{\varepsilon \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{\varepsilon \to \infty} \delta_\varepsilon(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt.$$

Mamy ostatecznie

$$\boxed{\delta(t)=\begin{cases}0, & t\neq 0,\\ \infty & t=0\end{cases}\qquad \text{oraz}\qquad \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=1.}$$

Analogicznie, przechodząc w zależności $[\mathbf{1}_\varepsilon(t)]'=\delta_\varepsilon(t)$ do granicy przy $\varepsilon\to 0$, dostajemy

$$\boxed{[\mathbf{1}(t)]'=\delta(t)}$$

Dla przesuniętego sygnału Diraca $\delta(t-t_0),\ t_0>0$, mamy oczywiście

$$\delta(t-t_0)=\begin{cases}0, & t\neq t_0,\\ \infty & t=t_0\end{cases}\qquad \text{oraz}\qquad \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)dt=1.$$

Odnotujmy jeszcze, że

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty}a\cdot\delta(t)dt=a.}$$

Wyprowadźmy kolejną własność związaną z deltą Diraca. Niech f będzie pewną funkcją ciągłą w punkcie t_0. Wtedy

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)f(t)dt&=\int_{-\infty}^{\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\delta_\varepsilon(t-t_0)f(t)dt=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{t_0}^{t_0+\varepsilon}\frac{1}{\varepsilon}f(t)dt\\&=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\cdot\varepsilon\cdot f(t^\star)=f(t_0),\end{aligned}$$

gdzie $t^\star\in(t_0;t_0+\varepsilon)$ (skorzystaliśmy tutaj ze znanego z analizy matematycznej twierdzenia o wartości średniej dla całek). Zatem

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)f(t)dt=f(t_0).}$$

Zbadajmy teraz jak delta Diraca reaguje na transformatę Laplace'a. Obliczmy

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[\delta(t-t_0)f(t)\right]&=\int_0^{\infty}\delta(t-t_0)f(t)e^{-st}\,dt=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{\infty}\delta_\varepsilon(t-t_0)f(t)e^{-st}\,dt\\&=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{t_0}^{t_0+\varepsilon}\frac{1}{\varepsilon}f(t)e^{-st}\,dt==\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\cdot\varepsilon\cdot f(t^\star)e^{-st^\star}=f(t_0)e^{-st_0}.\end{aligned}$$

Ostatecznie

$$\boxed{\mathcal{L}\left[\delta(t-t_0)f(t)\right]=f(t_0)e^{-t_0 s}.}$$

W szczególności gdy $f(t)=\mathbf{1}(t)$, to

$$\boxed{\mathcal{L}\left[\delta(t-t_0)\right]=e^{-t_0 s},}$$

a gdy $t_0=0$, to

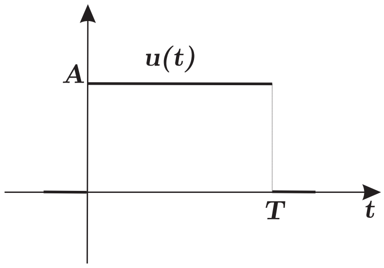
$$\boxed{\mathcal{L}\left[\delta(t)\right]=1.}$$

Przykład 6.1 Załóżmy, że pewien układ sterowania opisywany jest równaniem różniczkowym

$$x''(t) + 4x'(t) + 5x(t) = u'(t) + u(t),$$

gdzie u jest daną funkcją (sygnałem wejściowym) a x - funkcją szukaną (sygnałem wyjściowym). Wyznaczyć rozwiązanie przy zerowych warunkach początkowych i sterowaniu u danym przepisem

$$u(t) = \begin{cases} A, & t \in (0;T)\,, \\ 0, & t < 0 \ \vee\ t > T \end{cases}$$ patrz rysunek



R o z w i ą z a n i e : Funkcję u zapisujemy w postaci

$$u(t) = A[\mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t-T)], \quad \text{wtedy} \quad u'(t) = A[\delta(t) - \delta(t-T)]$$

Po zastosowaniu transformaty Laplace'a do obu stron danego równania, otrzymujemy

$$s^2X(s) + 4sX(s) + 5X(s) = A\left[1 - e^{-Ts}\right] + A\left[\frac{1}{s} + \frac{1}{s}e^{-Ts}\right].$$

Stąd

$$X(s) = A\left[\frac{1}{s^2+4s+5} - \frac{1}{s^2+4s+5}e^{-Ts}\right] + A\left[\frac{1}{s(s^2+4s+5)} - \frac{1}{s(s^2+4s+5)}e^{-Ts}\right]$$
$$= A\left[\frac{s+1}{s(s^2+4s+5)} + \frac{s+1}{s(s^2+4s+5)}e^{-Ts}\right].$$

Po rozkładzie funkcji wymiernej na ułamki proste i po przekształceniach dostajemy

$$X(s) = \frac{A}{5}\left[\frac{1}{s} - \frac{s+2}{(s+2)^2+1} + \frac{1}{(s+2)^2+1}\right] + \frac{A}{5}\left[\frac{1}{s} - \frac{s+2}{(s+2)^2+1} + \frac{1}{(s+2)^2+1}\right]e^{-Ts}.$$

Po zastosowaniu transformaty odwrotnej otrzymujemy ostatecznie
O d p o w i e d ź :

$$x(t) = \frac{A}{5}\left[1 + (\sin t - \cos t)e^{-2t}\right]\mathbf{1}(t) + \frac{A}{5}\left[1 + (\sin(t-T) - \cos(t-T))\,e^{-2(t-T)}\right]\mathbf{1}(t-T).$$

7 Zadania

Uzasadnić wzory 8 – 13 z tabeli transformat na str. 9.
(wsk. zastosować odpowiednie podstawienia lub całkowanie przez części)

Wyznaczyć transformaty następujących oryginałów:

1. $\sin^2 t$, odp: $\frac{2}{s(s+4)}$.

2. $\cos^3 t$, odp: $\frac{s^3+7s}{(s^2+9)(s^2+1)}$.

3. $t\cos\omega t$, odp: $\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$.

4. $te^t\cos t$, odp: $\frac{s^2-2s}{(s^2-2s+2)^2}$.

5. $\cos^2(t-2)\cdot\mathbf{1}(t-2)$, odp: $\frac{e^{-2s}}{2s}+\frac{se^{-2s}}{2(s^2+4)}$.

6. $|\sin t|$, odp: $\frac{1}{(s^2+1)(1-e^{-\pi s})}$.

Wyznaczyć oryginał gdy znana jest transformata

7. $\frac{1}{s^2+4s+13}$, odp: $\frac{1}{3}\sin 3te^{-2t}$.

8. $\frac{s}{s^2-2s+3}$, odp: $(\cos\sqrt{2}t+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\sqrt{2}t)e^t$.

9. $\frac{2s+3}{s^3+4s^2+5s}$, odp: $\frac{3}{5}+\frac{1}{5}e^{-2t}(4\sin t-3\cos t)$.

10. $\frac{e^{-2s}}{(s+1)^2}$, odp: $(t-2)e^{-(t-2)}\mathbf{1}(t-2)$.

11. $\frac{e^{-s}}{s^2-1}+\frac{se^{-2s}}{s^2-4}$, odp: $\sinh(t-1)\cdot+\mathbf{1}(t-1)+\cosh 2(t-2)\cdot\mathbf{1}(t-2)$.

12. $\frac{e^{-\frac{1}{3}s}}{s(s^2+1)}$, odp: $\mathbf{1}(t-\frac{1}{3})-\cos(t-\frac{1}{3})\cdot\mathbf{1}(t-\frac{1}{3})$.

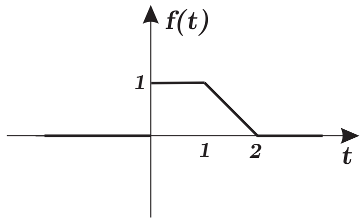
Rozwiązać następujące zagadnienia początkowe:

13. $x''+2x'+x=t^2e^{-t}$, $x(0)=x'(0)=0$.
odp: $x(t)=\frac{1}{12}t^4e^{-t}$.

14. $x''+4x=t\mathbf{1}(t-\pi)$, $x(0)=0$, $x'(0)=1$.
odp:
$x(t)=\frac{1}{2}\sin 2t\,\mathbf{1}(t)+\frac{1}{4}[(t-\pi)-\frac{1}{2}\sin 2(t-\pi)]\mathbf{1}(t-\pi)+\frac{\pi}{4}[1-\cos 2(t-\pi)]\mathbf{1}(t-\pi)$.

15. $x'''+x'=e^{-t}$, $x(0)=1$, $x'(0)=x''(0)=0$.
odp: $x(t)=\frac{1}{6}\cos 2t-\frac{2}{3}\cos t+\frac{3}{2}$.

16. $x'' + 9x = f(t), \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0,$
gdzie funkcja f dana jest wykresem



odp:
$x(t) = \left(\frac{1}{9} + \frac{8}{9}\cos 3t\right)\mathbf{1}(t) + \frac{1}{9}\left[(t-1) - \frac{1}{3}\sin 3(t-1)\right]\mathbf{1}(t-1)$
$+\frac{1}{9}\left[(t-2) + \frac{1}{3}\sin 3(t-2)\right]\mathbf{1}(t-2).$

17. $\begin{cases} 2x' + y' = \sin t \\ x' + y' = \cos t \end{cases} \quad x(0) = 0,\ y(0) = 0.$
odp: $x(t) = 1 - \sin t - \cos t; \quad y(t) = \cos t + 2\sin t - 1.$

18. $\begin{cases} x' - y' + x + y = 1 \\ x' + y' - x + y = t \end{cases} \quad x(0) = 0,\ y(0) = 0.$
odp: $x(t) = \sin t - \cos t - \frac{1}{2}t + 1, \quad y(t) = -\sin t - \cos t + \frac{1}{2}t + 1.$

19. $x(t) = \sin t + 2\int_0^t \cos(t-\tau)x(\tau)d\tau.$
odp: $x(t) = te^t.$

20. $x(t) = 2 + \int_0^t \sin\tau\, x'(t-\tau)\, d\tau, \quad x(0) = 0.$
odp: $x(t) = 2 + \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t \cdot e^{\frac{1}{2}t}.$

21. $x'' + x = f(t), \quad x(0) = x'(0) = 0,$
gdzie f jest oryginałem okresowym danym wzorem
$f(t) = t - n$ dla $n \leqslant t < n+1, \quad n = 0, 1, \ldots$.
odp:
$$x(t) = \begin{cases} t - \sin t, & t \in (0;1) \\ t - \sin t + \cos(t-1) - 1, & t \in (1;2) \\ t - \sin t + \cos(t-1) + \cos(t-2) - 2, & t \in (2;3) \\ \vdots & \end{cases}$$

22. $x''' + x' = u'' + 2u' + u, \quad x(0) = x'(0) = x''(0) = 0,$ gdy $u(t) = t\mathbf{1}(t)$
odp: $\frac{1}{2}t^2 + 2t - \sin t.$

8 Literatura

[1] Kącki E., SiewierskiL., *Wybrane działy matematyki wyższej z ćwiczeniami*, Warszawa 1975.

[2] Trajdos T.,*Matematyka dla inżynierów*, WNT Warszawa 1974.

[3] Krasnow M., Kisielew A., Makarenko G. *Funkcje zmiennej zespolonej. Rachunek operatorowy. Teoria stabilności.* , Nauka, Moskwa 1971 (po rosyjsku).

[4] Krasnow M.I., Makarenko G.I. *Zadania z rachunku operatorowego i stabilności ruchu*, PWN, Warszawa 1970.

[5] Stankiewicz W., Wojtowicz J. *Zadania z matematyki dla wyzszych uczelni technicznych, część druga* PWN, Warszawa 1971.