

## Kącik matematyczny



Są pewne zagadnienia w matematyce tak podstawowe, iż wydają się istnieć od zawsze. Jednym z nich jest układ współrzędnych i jego zastosowanie. Nie należy on do najdawniejszych pojęć w matematycznych, niemniej odegrał ogromną rolę i trudno byłoby obecnie wyobrazić sobie jego brak. Może więc warto troszkę o nim opowiedzieć, jak i co nieco o elementach geometrii analitycznej.

## Małżeństwo algebry z geometrią (czyli coś o geometrii analitycznej)

*„Ktokolwiek myśli, że algebra to sztuczka pozwalająca uzyskać to, co nieznanne, myśli na próżno. Nie należy zwracać uwagi na to, że algebra i geometria różnią się z wyglądu.*

*Algebra, to udowodnione fakty geometryczne.”*

Omar Chajjana (1048–1131) – matematyk arabski

*„Algebra współczesna nie wydaje się taka przerażająca jeżeli wyrazi się ją w geometrycznych terminach.”*

G. de B. Robinson

*„Matematyki, geometrii i logiki możemy zawsze być pewni. Taka wiedza jest czysta i konieczna.”*

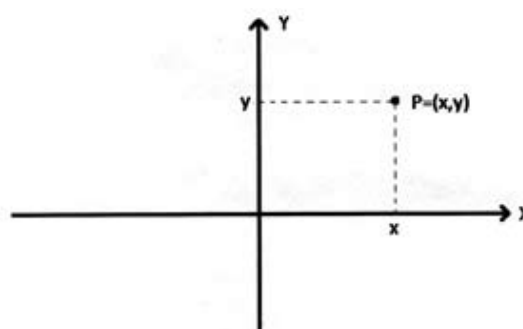
Kartezjusz (filozof i matematyk francuski)

Chociaż matematykę dzieli się na odrębne działy, takie jak teoria liczb, algebra, geometria i tak dalej, to nie ma sztywnych i trwałych granic między nimi. Dość często problemy, które wydają się przynależać do danej dziedziny, można rozwiązać, wykorzystując metody zaczerpnięte z innej. Przełom dochodzi gdy pojawia się jakiś nieoczekiwany związek między tematami uważanymi wcześniej za całkowicie odrębne.

Prawdziwy rozmiar i wpływ wzajemnej inspiracji różnych obszarów można docenić w pracach XVII wieku. W tym krótkim czasie dwóch największych matematyków świata odkryło związek między algebrą i geometrią. Potwierdza to fakt, że, wykorzystując tzw. układ współrzędnych, można te dwie dziedziny połączyć. I tak powstał nowy dział matematyki, zwany obecnie geometrią analityczną.

Dlatego zanim przejdę do pewnych informacji historycznych, opowiem o układzie współrzędnych na płaszczyźnie (nazywany też układem kartezjańskim). Jest to układ dwóch osi prostopadłych – poziomej i pionowej. Umożliwia on przypisanie każdemu punktowi na płaszczyźnie adresu liczbowego. Oś pozioma najczęściej zwana osią  $x$ , jest osią liczbową o skali wzrastającej w prawo, zaś oś pionowa, zwana osią  $y$ , ma skalę wzrastającą w górę. Daje to możliwość przypisania każdemu punktowi geometrycznemu na płaszczyźnie uporządkowanej pary liczb.

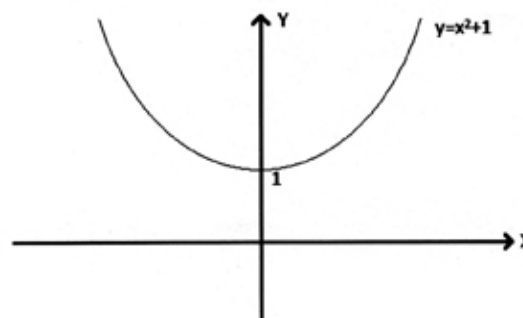
Stąd punkt na płaszczyźnie został utożsamiony z parą liczb jak i odwrotnie, każdej parze liczb odpowiada dokładnie jeden punkt na płaszczyźnie. W matematyce nazywa się to wzajemnie jednoznaczny porządkowaniem.



Układ współrzędnych

Oczywiście zaznaczenie pojedynczego punktu na płaszczyźnie nie jest interesujące. Sytuacja się zmienia, gdy mamy do czynienia z równaniem, np.  $y=x^2+1$ . Interpretujemy je jako zbiór wszystkich punktów  $(x,y)$  na płaszczyźnie, dla których związek pomiędzy współrzędnymi jest  $y=x^2+1$ .

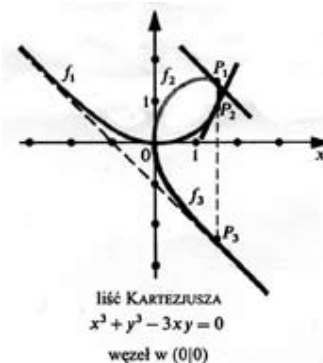
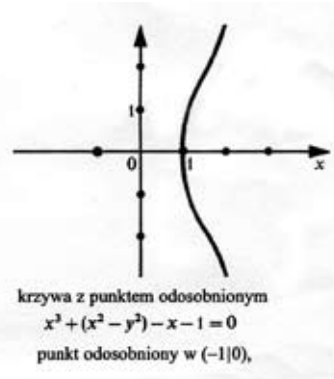
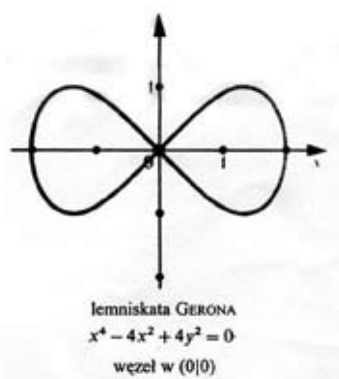
Stąd równanie algebraiczne tworzy krzywą geometryczną, w tym przypadku parabolę.



Parabola

To powiązanie algebry z geometrią wydaje się całkowicie naturalne. Dzięki układowi współrzędnych wiele równań algebraicznych daje się łatwo rozwiązać. Trudno jest oddzielić prostą algebrę od geometrii.

A wszystko to stało się możliwe dzięki niezwykłemu osiągnięciu matematyka francuskiego Rene Descartesa (1596-1650) nazywanego krótko Kartezjuszem.



Ale, jak to zwykle bywa, początków łączenia algebry z geometrią można doszukiwać się również dużo wcześniej, np. w trygonometrii. Co więcej, już w 1572 r. Bombelli w swojej pracy pt. „Algebra” przedstawił wiele zagadnień algebraicznych, które rozwiązał geometrycznie.

Wykorzystanie współrzędnych jako pierwszy zaproponował Pierre de Fermat (1601-1665) francuski matematyk. Jest on jednak bardziej znany ze swoich prac z teorii liczb niż z geometrii. Niemniej w swojej pracy pt. „Wprowadzenie do miejsc geometrycznych płaszczyzny i brył” odkrył zalety wyrażania pojęć geometrycznych za pomocą algebry.

Zapoczątkowanie połączenia algebry z geometrią, czyli początku tzw. geometrii analitycznej, przypisuje się jednak Kartezjuszowi.

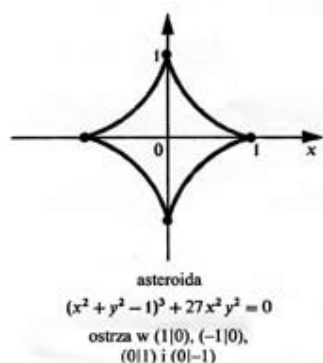
Opublikował on w 1637 r. pracę pt. „Discours de la Methode” i do tego traktatu dołączył aneks „Geometrie”. Tam też można znaleźć jego układ współrzędnych. No, może graficzne reprezentacje równań nie zawsze przypominają obecnie używane, ponieważ na swoich wykresach nigdy nie używał on wartości ujemnych.

Znany obecnie wykres podzielony na cztery części przez współrzędne przecinające się w punkcie o współrzędnych (0,0) wprowadził nieco później Izaak Newton.

Praca Kartezjusza była dość trudna do zrozumienia i dopiero 12 lat po oryginale wyniki jego upowszechniły się. Przyczyniło się do tego jedno z wydań „Geometrie” przygotowane przez F. van Schootena (1615-1660) z Amsterdamu. Zawiera ono rozległy i przystępnie napisany komentarz. Uczyniło to przedmiot czytelny dla szerszej publiczności. Z wydania Schootena korzystali zarówno I. Newton, jak i W. Leibniz.

Przedmiot ten nie był jednak tożsamy ze współczesnym odpowiednikiem geometrii analitycznej. W tamtych czasach osie nie zawsze rysowano prostopadle.

Począwszy od innowacji wprowadzonych przez Fermata



i Kartezjusza oraz późniejszy wkład Newtona, geometria analityczna stabilizowała się i standaryzowała.

Krótko mówiąc, od samego początku w służbie geometrii jest algebra, jak i geometria obsługuje algebrę. To połączenie przyczyniło się również do rozwoju rachunku różniczkowego.

Geometrię analityczną można stosować na powierzchniach bardziej skomplikowanych niż płaszczyzna, np. na sferze czy w przestrzeni. I tak to zrodziły się takie współrzędne jak długość i szerokość geograficzna. Krótko mówiąc, powstały podstawy nawigacji. Co więcej, kartografię można także postrzegać jako przykład praktycznego zastosowania geometrii analitycznej.

Inny przykład współczesnego zastosowania współrzędnych kartezjańskich można znaleźć na giełdzie papierów wartościowych, gdzie fluktuacje niektórych cen zapisuje się w postaci krzywych. W tym przypadku rolę współrzędnej x pełni czas, a współrzędną y jest cena. W ten sam sposób zapisywana jest olbrzymia ilość danych finansowych i naukowych. Krótko mówiąc, współrzędne należą do tych prostych i genialnych idei, które wywarły wyraźny wpływ na nasze życie codzienne. Posługujemy się nimi wszędzie, zwykle nie zdając sobie nawet z tego sprawy.

Obecnie zaś praktycznie cała grafika komputerowa posługuje się wewnętrznym układem współrzędnych, a kształty geometryczne pojawiające się na ekranie są przetwarzane algebraicznie.

Z geometrią analityczną wiąże się też głębsze przesłanie dotyczące roli wzajemnych powiązań w matematyce. Pojęcia, których realizacje fizyczne wydają się zupełnie inne, mogą się okazać różnymi przejawami tego samego zagadnienia.

Na zakończenie trzeba stwierdzić, że geometria analityczna wzmocniona techniką komputerową wykazuje dużą moc.

Nie poruszyłam tu bardzo wielu tematów z tej dziedziny. Można je jednak znaleźć zarówno w książkach matematycznych, jak i w Internecie.

Moim celem było jak zwykle zwrócić uwagę na niezwykłość matematyki i jej osiągnięć.

Krystyna Nowicka  
 Centrum Naucz. Matematyki i Kształcenia na Odległość

P.S.1)Dawniej mówiono: „Kto nie zna algebry – ten pójdzie na żebry!”

Obecnie: „Nie algebra lecz chęć szczerza zrobi z Ciebie menadżera”.

2) Nauczyciel pyta: Co można powiedzieć o prostych na płaszczyźnie, które nie mają punktów wspólnych?

Jaś: Że są bardzo samotne.