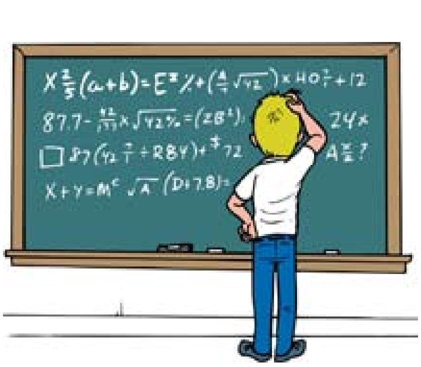


Kącik matematyczny

Zmienność otaczającego nas świata jest tak ogromna, że często zapominamy o podstawowych sprawach. Ma to wpływ również i na matematykę, a w tym na proste działania arytmetyczne. No bo któż obecnie wykonuje obliczenia bez użycia kalkulatora lub komputera? Dla młodych ludzi jest to po prostu niemożliwe. Wiedza o najprostszych własnościach działań arytmetycznych zanika. Szczególnie kłopotliwe stały się ułamki. Może więc warto o nich trochę opowiedzieć.

Och, te ułamki!

„Matematyka jest i zawsze była grą liczbami – w całym tego znaczeniu”
C. Gauss

„Współczesna cywilizacja szybko by upadła, gdybyśmy zaprzestali powszechnego nauczania arytmetyki.”
I. Stewart

„Pamiętam, jak jej powiedziałem, że urosłem o dwa i pół cala w ciągu ostatnich siedmiu miesięcy i że w tym tempie powinienem urosnąć o cztery i dwie siódme cala w ciągu roku. Czy wiesz – odparła – że nie należy nigdy mówić o żadnych ułamkach z wyjątkiem połówki i ćwiartki. To jest pedanteria!”
Bertrand Russel wspominając swoją babkę.

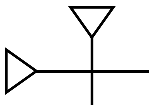
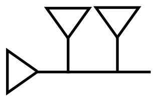
Ułamki są częścią edukacji szkolnej i podstawą obliczeń arytmetycznych. Wydawałoby się więc, że wszyscy je dobrze znamy. Niestety, łatwo można się przekonać, że tak nie jest. Tym bardziej, że wiele osób myśli: Dlaczego musimy uczyć się ułamków w czasach, gdy większość ludzi używa kalkulatorów?

Wobec tego może na wstępie warto podać kilka ogólniejszych faktów. Po pierwsze arytmetyki używamy w całym naszym codziennym życiu. Jesteśmy całkowicie uzależnieni od liczb. Oczywiście, przed pojawieniem się kalkulatorów i komputerów obliczenia były wykonywane ręcznie za pomocą kartki i ołówka, może czasem korzystano z liczydeł czy tablic. Obecnie większość operacji arytmetycznych wykonują urządzenia elektroniczne. Część z nich może się nawet odbywać automatycznie, bez udziału człowieka. Dlatego zanika powoli arytmetyczna wiedza o obliczeniach. Gdyby jednak naszą jedyną umiejętnością było odczytywanie liczb na ekranie kalkulatora, pewnie nie zauważylibyśmy błędu np. w rachunkach z supermarketu. Oprócz tego, bez przyswojenia sobie podstawowych operacji arytmetycznych, cała matematyka stałaby się dla nas niedostępna.

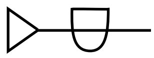
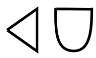
Po drugie system liczbowy, jakim się posługujemy, często wydaje nam się taki jedyny i oczywisty. Nie zastanawiamy się, że mogłoby być inaczej. W istocie jest on wynikiem żmudnej ewolucji, która trwała tysiące lat i niejednokrotnie zapędzała się w ślepe uliczki. Zresztą sama znajomość liczb i działań na nich w czasach prehistorycznych była godną podziwu zdolnością. Umiejętność liczenia była sztuką równie mistyczną i tajemną, co rzucanie uroków (wszak dawała możliwość przewidywania np. zaćmienia słońca). Sądzę, że warto więc na początku podać kilka uwag historycznych, a następnie przedstawić współczesne spojrzenie na różne typy ułamków i ich własności.

Na każdym etapie rozwoju liczb spotykamy ułamki. Często miały one inną postać niż obecny zapis, ale znaczyły to samo.

Historia ułamków sięga starożytnego Babilonu (ok. 1800 r. p.n.e.). Wiedza na ten temat pochodzi z glinianych tabliczek, na których pismem klinowym były zapisane różnorodne obliczenia. Niektóre ułamki miały indywidualne oznaczenia i mogły się zmieniać w różnych okresach. I tak np.

 oznaczało $\frac{1}{2}$,  oznaczało $\frac{1}{3}$

w zapisie akadyjskim, zaś

 $= \frac{1}{2}$,  $= \frac{1}{3}$,

w zapisie starosumeryjskim.

Ponadto w zapisie ułamków używano systemu sześćdziesiątkowego odpowiadającego obecnemu systemowi dziesiętnemu.

Babilończycy swoje umiejętności rachunkowe wykorzystywali w dwóch celach, w zwykłych sprawach życiowych (głównie handlowych) i w astronomii (ruch planet, zaćmienie Słońca).

W następnych wiekach starożytni Egipcjanie też używali ułamków, ale głównie ułamków, które teraz nazywają się ułamkami prostymi, tj. postaci $1/n$. Cała niemal arytmetyka egipska była dążeniem do rozkładu dowolnego ułamka (oprócz $2/3$) na sumę ułamków prostych. Rozkład taki nie jest jednoznaczny, gdyż np.

$\frac{2}{5}=\frac{1}{5}+\frac{1}{5}$, jak i $\frac{2}{5}=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$ (zapis w wersji współczesnej).

A tak przy okazji, zapis hieroglificzny ułamków wyglądał następująco

 $= \frac{1}{3}$,  $= \frac{1}{4}$,  $= \frac{2}{3}$,  $= \frac{5}{6}$,

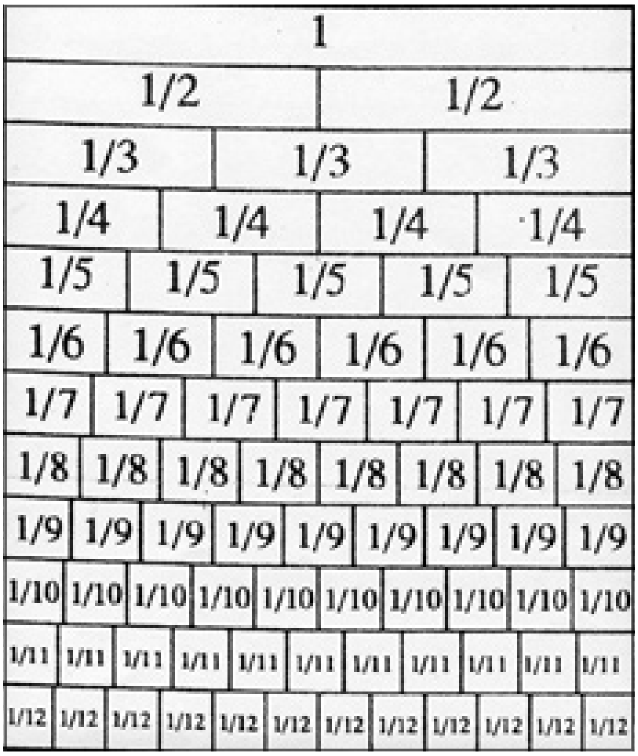


Tabela do porównywania i działań na ułamkach

Najwięcej informacji na ten temat dostarcza papirus Rhinda. Został on odkryty w Luksorze w 1858 r., a obecnie znajduje się w British Museum w Londynie. Odczytanie tego dokumentu wyjaśnia nie tylko, do czego starożytni Egipcjanie używali ułamków, ale również, jak dokonywali obliczeń.

Matematyka egipska miała wpływ zarówno na matematykę grecką, jak i rzymską.

W starożytnej Grecji do oznaczenia liczb używano liter alfabetu, zaznaczając je kreseczką. Na przykład 1 = $\bar{\alpha}$ (alfa), 2 = $\bar{\beta}$ (beta) itd. Ułamki o liczniku 1 zapisywano, pomijając licznik, a przy literze odpowiadającej mianownikowi stawiano dwie kreseczki np. ½ = β''. Jednak do obliczeń astronomicznych używano ułamków babilońskich w systemie szcześćdziesiątkowym.

Jak wiadomo, Grecy (Szkoła Pitagorejska) wykorzystali również ułamki w muzyce, tworząc odpowiednią skalę muzyczną.

Ułamki przed naszą erą pojawiły się także w Chinach, w matematyce hinduskiej czy arabskiej. I tu ciekawostka: w Chinach ½ była nazywana połową, ⅓ mniejszą połową, a ⅔ większą połową. To określenie zostało nam chyba do dzisiaj, gdyż często słyszę w wypowiedziach telewizyjnych o mniejszej i większej połowie (tylko, czy to samo znaczy w Chinach?).

Współczesny sposób zapisywania ułamków zwykłych przy pomocy kreski ma swoje źródło w matematyce hinduskiej. Zapisywano tam jedną liczbę nad drugą, ale jeszcze bez kreski. Kreskę dodali matematycy arabscy. Z matematyki arabskiej skorzystał w XIII w. Fibonacci i przeniósł tę wiedzę na teren europejski.

Pierwszy europejski traktat o ułamkach dziesiętnych napisał w 1585 roku matematyk holenderski Simon Stevin. Jednak wymyślona przez niego notacja była inna od współczesnej, gdyż nie zawierała przecinka lub kropki. Obecny zapis 5,912 miałby wówczas postać 5⓪9①1②2③. Niemniej uważa się Stevina za twórcę ułamków dziesiętnych. Faktem jest również to, że nie wiedział on, iż już w 1425 r. al-Kaszi kierownik obserwatorium astronomicznego w Samarkandzie posługiwał się w obliczeniach ułamkami dziesiętnymi.

Z wieloma metodami zapisu ułamków dziesiętnych eksperymentował francuski matematyk F. Viete (1540 – 1600). Natomiast użycie kropki lub przecinka zaproponował w 1677 r. J. Napier.

Ułamki okresowe czyste wyprowadził J. Wallis (1616 – 1703), a ustaleniem liczby cyfr w okresie podstawowym zajmował się nawet G.W. Leibniz (1646 – 1716, twórca rachunku różniczkowego i całkowego).

Obecnie ułamki mają swoje miejsce w teorii liczb i są poddawane bardzo różnorodnej analizie. Dla przykładu, szukano najkrótszego rozkładu liczby 1 na sumę ułamków prostych (tj. o liczniku 1) o mianownikach nieparzystych ($1/1$ nie liczy się). Rozkład taki znaleziono w 1971 r. i ma on postać

$$1=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{45}+\frac{1}{231}$$

Wystarczy zajrzeć do teorii liczb, aby znaleźć tam znaczną ilość ciekawych zagadnień. Ułamki, jak już było na wstępie zaznaczone, są podstawą edukacji szkolnej. Najczęściej spotyka się tam ułamki zwykłe i dziesiętne, rzadziej ułamki łańcuchowe.

Ułamek, jak sama nazwa wskazuje, jest „liczbą złamaną". Wprowadzając to pojęcie, odwołujemy się najczęściej do tradycyjnych przykładów, mówiąc o części całości. Gdy dzielimy na przykład tort na trzy równe części, ktoś, kto dostanie dwie z tych trzech porcji, dostanie część odpowiadającą ułamkowi ⅔, zaś ktoś drugi tylko ⅓. Podobnie, gdy kupujemy coś w sklepie za ⅘ ceny, oznacza to, że towar potaniał o ⅕ ceny. Ale uwaga, trudno mówić o ½ człowieka czy ¼ kota. Dla przypomnienia, ułamek zwykły jest zapisywany przy użyciu kreski.

$$\frac{\text{liczba całkowita}}{\text{liczba całkowita} \neq 0} = \frac{\text{tzw. licznik}}{\text{tzw. mianownik}}$$

W dalszej edukacji dzielimy ułamki zwykłe na właściwe, np. ⅔ (licznik mniejszy od mianownika) i niewłaściwe, np. 3/2 Ponadto określa się równość ułamków (np. $4/8$ = ½), działania arytmetyczne oraz ich własności. I tu ciekawostka: łatwiej jest mnożyć i dzielić ułamki zwykłe niż dodawać i odejmować.

Niestety, co roku stwierdzam brak tych umiejętności u części moich studentów.

W systemie dziesiętnym każdy ułamek zwykły nieskracalny daje się zapisać w postaci ułamka dziesiętnego o skończonej liczbie cyfr po przecinku lub kropce, np. ½ = 0,5, ¾ = 0,75 albo nieskończonej ilości cyfr, np. ⅓ = 0,3333...

Najmniejszą grupę cyfr powtarzających się w ułamku dziesiętnym, nieskończonym nazywamy okresem podstawowym, a taki ułamek nazywa się okresowym umownie, zapisując np. ⅓ = 0,(3). Oprócz tego ułamki dziesiętne okresowe dzielą się na czyste np. 0,(3) = 0,333... oraz mieszane np. 0,52(1) = 0,52111... . Oczywiście, chcąc otrzymać postać dziesiętną ułamka zwykłego, dzielimy licznik przez mianownik.

Natomiast zamiana ułamka np. okresowego nieskończonego na ułamek zwykły wymaga dodatkowej wiedzy. I tak np. 0,(9) = 0,999 ... = 1. Tu niespodzianka, gdybyśmy skorzystali z tej równości, to mogłoby się okazać, że 1 + 1 ≠ 2 . Rzeczywiście 1 + 1 = 0,(9) + 0,(9) ≈ 0,999... + 0,999... Jeżeli działania wykonujemy na kalkulatorze, a więc tylko z ograniczoną dokładnością, np. do trzech miejsc po przecinku, to otrzymamy 0,999 + 0,999 = 1,998 ≠ 2. Krótko mówiąc, działania na ułamkach dziesiętnych nieskończonych wykonane na kalkulatorze dają wynik przybliżony.

Szczególnymi ułamkami dziesiętnymi są procenty, wszak 1% to 0,01 całości. Jak wszystkim wiadomo, odgrywają one istotną rolę w naszym życiu codziennym. Ach te kuszące reklamy bankowe, czy te mówiące o obniżce cen, jak one często wykorzystują brak umiejętności obliczania procentów.

Ułamki zwykłe (lub dziesiętne) tworzą tzw. zbiór liczb wymiernych. Dowolna liczba całkowita *„a”* także należy do tego zbioru, bowiem może być zapisana w postaci ułamka $\frac{a}{1}$.

W matematyce można spotkać stwierdzenie, że liczby wymierne są rozłożone gęsto. Oznacza to, że pomiędzy dowolnymi dwiema liczbami wymiernymi zawsze musi się znaleźć liczba wymierna. Jeżeli np. a/b < c/d, to wartość średnia ½(a/b + c/d) leży dokładnie między nimi.

Można też stwierdzić, że punkty wymierne (odpowiadające liczbom wymiernym na osi liczbowej) nie zapełniają całkowicie osi liczbowej. Punkty te tworzą niejako pewien układ, którego szpary i szczeliny zapełniają liczby niewymierne (np. √2, √3 itp.).

Każdą liczbę wymierną można również zapisać w postaci tzw. ułamka łańcuchowego, posługując się algorytmem Euklidesa. Tu poprzestanę tylko na przykładzie, a mianowicie

$$\frac{43}{10} = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4}}}$$

Z ułamków łańcuchowych korzystano na przykład przy projektowaniu zestawów przekładni zębatych, czy w pewnych stwierdzeniach wiedzy muzycznej np., że
7 kwint to w przybliżeniu 4 oktawy,
12 kwint to w przybliżeniu 7 oktaw,
41 kwint to w przybliżeniu 24 oktawy.

W teorii liczb można spotkać jeszcze wiele różnorodnych ułamków, jak na przykład ułamki pitagorejskie czy ułamki Fareya. Sądzę jednak, że na razie wystarczy. Na zakończenie należałoby jeszcze zaznaczyć, że matematyka szkolna może być dosyć odległa od współczesnej matematyki abstrakcyjnej. Dla przykładu, ułamki w teorii kategorii są określane jako para [Q(A),] złożona z ciała *Q(A)* i homomorfizmu różnowartościowego *Q(A)* spełniającego warunek minimalności. (Uff!)

Nie musimy jednak próbować zapamiętać tej definicji. W zwykłych codziennych sprawach wystarcza dobra wiedza szkolna. Trzeba pamiętać, że nie nauczymy się rozsądnie operować ułamkami, jeżeli będziemy polegać jedynie na kalkulatorze.

Krystyna Nowicka
CNMiKnO

P.S.
Może jeszcze troszkę humoru szkolnego o ułamkach:
Nauczyciel: *Jasiu, jak podzielić pięć jabłek między siedmioro dzieci?* Jaś: *Zrobić kompot*

Nauczyciel: *Jasiu, jakie działanie zastosujesz, jeśli chcesz z trzech desek zrobić sześć?* Jaś: *Piłowanie, proszę pana.*

Fotografowanie architektury jako sztuka

Fotografia związana z architekturą to w dzisiejszych czasach kunszt. Stanowi sama w sobie formę wypowiedzi autorskiej artysty fotografa. Wobec tego powstaje pytanie, czy fotografia architektury zbudowanej, czy też nawet już nieistniejącej, pomaga odbiorcy dowiadywać się czegoś ważnego o istocie struktury dzieła architektonicznego?

Czy niesie jedynie przekaz wynikający z woli oraz indywidualności fotografa-artysty!

Niestety wydaje się, że dzięki współczesnym możliwościom technicznym i powszechnej manierze manipulacji wizualnej, dzisiejsza fotografia architektury zdaje się być pochłonięta raczej poszukiwaniem niezwykłości ujęcia, czyli doskonaleniem „kadru”, oczarowywaniem odbiorcy, szukaniem wartości dodanej do istniejącej rzeczywistości bardziej niż obrazowaniem.

Nadeszła na szczęście, co można zaobserwować w prasie architektonicznej,