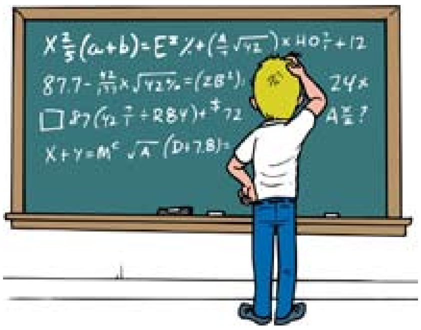


Kącik matematyczny

Przypadkowe oglądanie różnorodnych konkursów telewizyjnych skłoniło mnie do zastanowienia się nad poziomem wiedzy z geometrii w naszym społeczeństwie.

Tym bardziej, że odpowiedzi na pytania z tej dziedziny były błędne (chociaż nie wykraczały one poza wiedzę szkolną).

Nieco inne refleksje o geometrii wzbudził u mnie artykuł z fizyki zamieszczony w „Świecie Nauki" (edycja polska – styczeń 2011 r.) pt. „Geometryczna teoria wszystkiego".

Niestety, przedstawione tam rozważania o geometryczności świata wymagają już wiedzy z tzw. „matematyki wyższej" (no bo kto słyszał o grupach Liego?).

Co tak naprawdę wiemy o geometrii?

„Geometria pociąga duszę ku prawdzie"
Platon

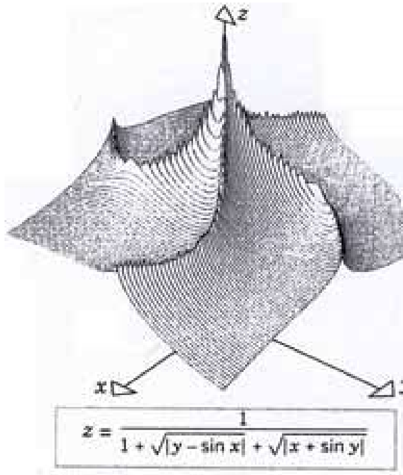
„Na co będą potrzebne, pytało pacholę,
Trójkąty, czworoboki, koła, parabole?
Że potrzebne, rzekł mędrzec, musisz mi uwierzyć
Na co potrzebne, zgadniesz, gdy świat zaczniesz mierzyć".
Adam Mickiewicz

„Przed dwoma tysiącami lat słowo „geometria" znaczyło „geometria euklidesowa". Później odkryto, że inne geometrie równie dobrze opisują przestrzeń fizyczną, a także, że geometria jest właściwą nauką o wszelkich możliwych przestrzeniach."
M. Kline „Geometria"

„Geometria jest ściśle związana z doświadczeniem przestrzeni i zmysłem wzroku"
W. Sadowski „Figura"

„Geometryczny obraz przyrody wynika naturalnie ze sposobu, w jaki funkcjonuje nasz świat. Fizycy twierdzą, że wszystkie zjawiska występujące w świecie, oddziaływania, a nawet wszystkie zjawiska występujące w świecie są efektem działania różnych pól. Ich zachowanie wskazuje na istnienie głębszej struktury geometrycznej."
A. G. Lisi i J. O. Weatherall „Geometryczna teoria wszystkiego"

Z naszą znajomością geometrii jest tak jak z „mówieniem prozą". Ona po prostu jest w naszym życiu. Niczym wiele innych spraw tego świata, przyjmujemy ją jako oczywistość.



Cóż, z geometrią spotykamy się na co dzień, narzekając na złe skrzyżowania ulic, podziwiając ciekawe budynki, stwierdzając, że coś ma kształt trapezu czy walca. To jest taka niewielka jej część.

Geometrii uczymy się w szkole. Jest to głównie wiedza z tzw. „geometrii euklidesowej". Owszem, czasami słyszymy, że coś jest w wersji trójwymiarowej, czytamy o czasoprzestrzeni czy oglądamy wykresy wielu badań, ale tego już nie kojarzymy z zagadnieniami geometrii.

W programie studiów technicznych jest troszkę wiedzy z geometrii analitycznej czy minimum wiedzy z geometrii różniczkowej. Chcąc jednak zapoznać się i zrozumieć wiedzę z tzw. „wyższej półki", należy sięgnąć do geometrii nieeuklidesowych.

Czytając wspomniany artykuł z fizyki, gdzie podstawą rozważań jest teoria grup Liego, przypomniało mi się, że w dawnych „dobrych" czasach nauczania było pojęcie grupy (w programie studiów technicznych na I roku). Obecnie zaś nauczanie matematyki na studiach technicznych nie ma szans na taki program. Powstaje jednak pytanie: czy dobrzy studenci powinni być pozbawieni „dobrej matematyki"? Oprócz tego mam wątpliwość, czy w razie potrzeby byliby w stanie nauczyć się sami. Matematyka ma to do siebie, że potrzebny jest dobry nauczyciel. Daje on możliwości szybkiego poznania i zrozumienia wielu niełatwych pojęć i teorii. Jest po prostu przewodnikiem w wędrówce po różnych obszarach matematyki.

Wracając jednak do pytania postawionego w tytule artykułu, nie jest możliwe odpowiedzieć na nie w pełni, nawet pisząc książkę na ten temat. Dlatego, jak zwykle, postaram się podać jedynie pewien zbiór uwag i informacji o różnych geometriach. Będzie to taki „geometryczny patchwork".

Poszukując wiedzy o geometrii, sama stwierdziłam, że wielu rzeczy nie wiedziałam albo nie uważałam za ważne dla poznawania świata. Cóż, kształty figur czy brył i ich właściwości często traktuję jako oczywistość. A przecież wielościany foremne odegrały ważną rolę w krystalografii, krzywe stożkowe w prawach ruchu planet Keplera itp.

Owszem, często zachwycają mnie takie książki jak „Galeria wielościanów" Z. Pogody (oj, polecałabym ją studentom architektury) czy wykorzystanie wielościanów sferycznych w budownictwie, ale brakuje mi czasu na zdobycie głębszej wiedzy. Oprócz tego, jak wiadomo, ilość wiedzy wzrasta co roku.

Rozwój matematyki (ale także innych dziedzin nauki) jest uwarunkowany postępami tak w dziedzinie nauki o liczbach, jak i geometrii. Wszak w matematyce korzysta się z dwóch głównych rodzajów rozumowania, symbolicznego i wizualnego. Intuicja wizualna jest silną cechą ludzkiego mózgu. Stąd obrazy odgrywają w matematyce ważną rolę, tworząc w niej najważniejsze pojęcia, takie jak kształt, wymiar, przestrzeń itp.

Pierwsze oryginalne osiągnięcia z matematyki uzyskano w dziedzinie geometrii. Około 4000 lat p.n.e. egipscy i babilońscy cieśle i mierniczy wprowadzili trochę prymitywnej matematyki do swojego działania.

Geometria starożytnych Egipcjan nie przyjmowała postaci teorii, ale dawała informacje czy formuły odpowiadające na najprostsze pytania o powierzchnię pól, pojemność spichrzów itp. Nie dostrzegano powiązań logicznych miedzy nimi. Przyjmowano to wszystko na zasadzie praktyki.

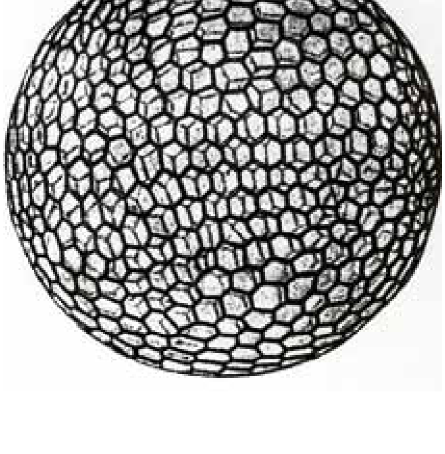
Dopiero starożytni filozofowie greccy między 600 a 300 rokiem p.n.e. nadali matematyce jej abstrakcyjną formę. Stworzyli dowód dedukcyjny, wznieśli budowlę geometrii euklidesowej i ustanowili podstawy do zrozumienia Wszechświata.

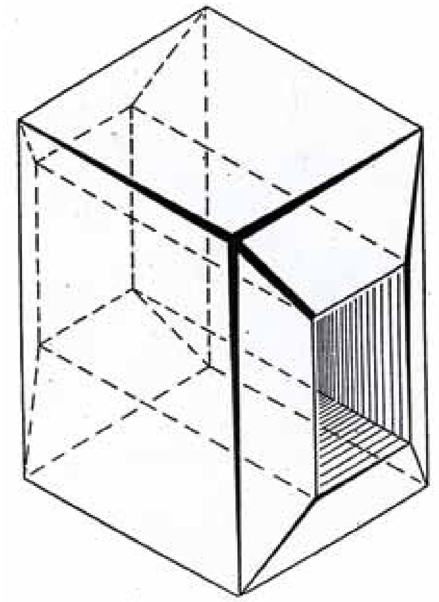
Należy jednak podkreślić, że w historii geometrii zawsze pojawia się potrzeba nurtu tak teoretycznego, jak i praktycznego. Możemy więc zarówno analizować figury lub bryły, jak i je budować.

Wybitnym autorem podsumowań ówczesnej wiedzy stał się Euklides (ok. 300 roku p.n.e.). Jego podręcznik geometrii „Elementy" stał się bestsellerem wszechczasów. Jest to arcydzieło dające pełen obraz geometrii dwuwymiarowej (na płaszczyźnie) i trójwymiarowej (w przestrzeni). W rankingu wydań dzieł w historii świata pierwsze miejsce zajmuje Biblia, a drugie miejsce właśnie „Elementy" Euklidesa.

Napisana 300 lat p.n.e. książka zachwyca do dziś ścisłością i jasnością wykładu. Dzięki swej logicznej strukturze wywarła ona ogromny wpływ na myślenie wielu ludzi. Przez wiele lat „Elementy" Euklidesa były podstawowym podręcznikiem do nauki matematyki. Składają się one z 13 ksiąg, które zawierają około 500 twierdzeń.

Wszystkie główne składniki geometrii euklidesowej – linie, kąty, okręgi, kwadraty i tak dalej są związane z pomiarami. Odcinki maja pewną długość, kąty mają określone rozmiary, okręgi definiuje się przez ich promienie, boki kwadratu mają daną długość. Ukrytym więc składnikiem, który sprawia, że cała geometria euklidesowa działa, jest długość, wielkość me-





tryczna. Nie zmienia się ona w wyniku ruchów bryły sztywnej i definiuje euklidesowe pojęcia odpowiadające ruchowi – przystawanie.

Wiele twierdzeń geometrii posiada dowody, których istotę łatwo pojąć od pierwszego rzutu okiem bądź po kilku cięciach nożyczkami (patrz tw. Pitagorasa).

No cóż, Grecy mieli jedną geometrię, my mamy ich wiele. Inna jest geometria atomu i inna jest geometria Wszechświata.

Są więc wywodzące się z geometrii teorie tak ogólne, że zatraca się pierwotny sens słowa geometria. Jedną z takich ważnych teorii jest dziś topologia (to nie jest nauka o topolach).

A wracając do historii geometrii, pierwszego kroku w kierunku nowej geometrii dokonali malarze Odrodzenia. Starali się oni rozwiązać zagadnienie wiernego kopiowania wszystkiego co rejestruje zmysł wzroku. Niestety, rzeczywiste sceny są trójwymiarowe, zaś dzieło malarskie jest płaskie. Stad malowanie realistyczne wydawało się niemożliwe. Jednak pokonano tę trudność, tworząc obraz rzutu. Zrodziło to również sformułowany najpierw przez malarzy, a potem przez matematyków problem geometryczny: jakie wspólne własności geometryczne ma figura geometryczna i jej obraz? I tak powstała geometria rzutowa. Przekształcenia jakie się tam rozważa mogą zmieniać zarówno odległości, jak i kąty. Niemniej obrazami trójkątów są trójkąty, a czworokątów czworokąty. W twierdzeniach geometrii rzutowej znamienne jest to, że nie rozważa się w nich przystawania, podobieństwa, równoważności i innych pojęć geometrii euklidesowej.

Rozwój geometrii rzutowej trwał jednak krótko, bo wkrótce pojawiła się nowa geometria. Rywalką jej stała się geometria analityczna. Wprowadziła ona do geometrii podejście algebraiczne. Stało się to za sprawą dokonań dwóch wybitnych matematyków: P. Fermata (1601–1665) i Kartezjusza (1596–1650). Odkryli oni niezwykły związek między algebrą, a geometrią, wykorzystując układ współrzędnych. Stąd geometria analityczna zwana też geometrią współrzędnych pozwala zastąpić krzywe na płaszczyźnie czy powierzchni w przestrzeni ich równaniami. Dla przykładu określa zbiór punktów na okręgu o promieniu 5, zaś zbiór punktów na sferze.

Dzięki temu osiągnięciu dokonał się zasadniczy zwrot we wzajemnym pojmowaniu nauki o liczbach i geometrii.

Można więc powiedzieć, że starożytni Grecy ukryli algebrę w geometrii, zaś w geometrii analitycznej algebra usunęła w cień geometrię.

Geometrię analityczną można stosować na powierzchniach bardziej skomplikowanych niż płaszczyzna, takich jak na przykład sfera. Najpowszechniejsze współrzędne sferyczne to długość i szerokość geograficzna. Stąd kartografię i wykorzystanie map w nawigacji można postrzegać jako przykład praktycznego zastosowania geometrii analitycznej.

Innym przykład wykorzystania współrzędnych można znaleźć w kartach akcji giełdy papierów wartościowych, czy grafice komputerowej.

Jednak technika algebraiczna nie była dostatecznie skuteczna w badaniu krzywych. Na przykład nie potrafiła określić nachylenia, czy krzywizny krzywej. Trzeba więc było sięgnąć do rachunku różniczkowego. Stworzyło to geometrię różniczkową.

Wszystkie te geometrie (euklidesowa, rzutowa, analityczna i różniczkowa) mają pewną cechę wspólną: przedmiotem ich badań są wciąż te same przestrzenie, różnią się jedynie doborem obiektów zainteresowań i związanymi z tym sposobami ich badania.

Z tego punktu widzenia najważniejszym osiągnięciem matematycznym XIX wieku jest skonstruowanie zupełnie innej przestrzeni geometrycznej. Dokonali tego (niezależnie) N. Łonaczewski (1792 – 1856) i J. Bolayi (1802 – 1860), a właściwie jeszcze wcześniej C.F. Gauss (1777–1855).

Tak oto zrodziły się geometrie nieeuklidesowe. Mamy tu do czynienia z rzeczywistym i głębokim przewrotem w sposobie myślenia.

Nie jest jednak możliwe omówić ten temat krótko i prosto.

Dlatego sądzę, że wystarczy już opowieści o geometrii. Oczywiście nie poruszyłam bardzo wielu zagadnień (np. chaos – fraktale, to też pewien rodzaj geometrii). Jednakże należy stwierdzić, że geometria dostarcza podstaw istnienia wielu suchym wzorom. Jest głównym źródłem bogatych intuicji. Często wielu skomplikowanym schematom nadaje treść.

Obecny wiek jest świadkiem realizowania twierdzenia Kartezjusza, że fizykę można zgeometryzować. Trudno też sobie wyobrazić geometrię Wszechświata bez osiągnięć w matematyce.

Krystyna Nowicka
C.N.M. i KnO

P.S.
A może jeszcze kilka drobiazgów.

1) „Ślęczałam nad tą nieznośna geometrią tak długo, że wyuczyłam się na pamięć wszystkich twierdzeń. Umiem je znakomicie, nawet, gdy litery są pozamieniane”.
(L.M. Montgomery „Ania z Zielonego Wzgórza”)
2) Co jest trudniejsze, kwadratura koła czy kołowacizna kwadratu?
3) „Można ułożyć taki program nauczania matematyki, który prowadzi do automatyzacji liczenia i debilizacji myślenia”
(E. Morowiec)