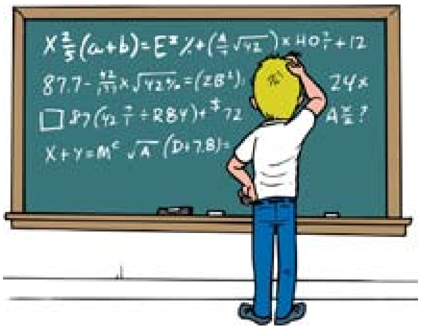


Kącik matematyczny

Całe dotychczasowe doświadczenie wskazuje na dwa niewyczerpane źródła nowych pytań w matematyce. Jednym z nich jest rozwój nauki i techniki żądający od matematyki pomocy. Drugim jest sama matematyka. Stąd też powstały potrzeby wprowadzania pewnych nowych stałych. Jedną z nich jest „tajemnicza” liczba *e* ($e \approx 2{,}7182$). Liczba ta ma ogromne znaczenie w matematyce, zarówno z powodów praktycznych, jak i teoretycznych. W porównaniu na przykład z liczbą π znaną od 4000 lat, *e* z 300-letnią historią jest „nowicjuszką”, lecz gdy się już pojawiła, prawie natychmiast zdominowała wiele dziedzin matematyki. Sądzę więc, że warto trochę o niej opowiedzieć.

Nadzwyczajna liczba *e*

„Niezwykłe związki między liczbami mogą skłonić do ogólniejszych refleksji, do zastanowienia się nad znaczeniem pojęcia liczby, nad naturą i potęgą matematyki.”
K. Ciesielski, Z. Pogoda „Diamenty matematyki”

„Liczba e, jeden z najbardziej zadziwiających tworów umysłu ludzkiego. Z pozoru – ogromnie dziwna i nienaturalna, w istocie przewija się przez wszystkie niemal dziedziny matematyki; w niektórych odgrywając rolę szczególną.”
Bogdan Miś „Tajemnicza liczba e i inne sekrety matematyki”
WNT 2008

Nadzwyczajność liczby *e* wynika z faktu, że jest ona jedną z najważniejszych stałych matematyki. Spotkać ją można zarówno w wielu działach matematyki, jak i w modelowaniu matematycznym. Czasami też pojawia się w najbardziej nieoczekiwanych miejscach. Potwierdza to analiza zagadnień dotyczących „wzrostu”. Niezależnie od tego czy chodzi o pieniądze, populacje, czy o inne wielkości fizyczne – wzrost niezmiennie wiąże się z *e*. Dlatego warto ją bliżej poznać, jak zwykle zaczynając od historii.

Pojawiła się na początku XVII wieku. Wówczas to wielu matematyków skupiło swoją energię na wyjaśnieniu pojęcia logarytmu. Był to w owych czasach niezwykły wynalazek ułatwiający obliczenia. Pozwalał zamienić mnożenie na dodawanie, zaś dzielenie na odejmowanie. Potrzeba był ogromna, bowiem to dzięki logarytmom astronomowie mogli zaoszczędzić swój czas i wysiłek. Należy pamiętać, że nie było wówczas tych cudownych narzędzi, jakimi są kalkulatory czy komputery, które dziś ułatwiają uciążliwe i skomplikowane obliczenia.

W roku 1618 John Napier – matematyk szkocki ułożył tablice logarytmów, bardzo pomocne przy obliczeniach astronomicznych. Logarytmy wymyślone przez Napiera były podobne do współczesnych logarytmów naturalnych, tj. logarytmów przy podstawie „e”. Stąd też czasami liczbę *e* nazywa się liczbą Napiera (w Polsce nazywana jest liczbą Nepera).

Natomiast oznaczenie „e” wprowadził matematyk szwajcarski Leonhard Euler (1707 – 1783) Obecnie liczba *e* częściej jest nazywana liczbą Eulera. W 1736 r. Euler udowodnił, że jest ona liczbą niewymierną (co oznacza, że nie można jej zapisać w postaci ilorazu dwóch liczb całkowitych), zaś w 1748 r. podał jej wartość z dokładnością 23 cyfr po przecinku.

W 1873 r. matematyk francuski Charles Hermite (1822 – 1901) udowodnił, że e jest liczbą przestępną (tzn. nie jest pierwiastkiem żadnego wielomianu o współczynnikach całkowitych). Fakty te potwierdzają, że *e* ma niekończone rozwinięcie dziesiętne. Oznacza to również, że nie poznamy nigdy jej dokładnej wartości.

A wszystko to stało się właściwie 9 lat wcześniej niż podanie dowodu przestępności liczby π. Co więcej, dowód Lindemanna o przestępności liczby π (z 1882 r.) opierał się na motywach dowodu przestępności liczby *e*.

Liczbę *e* definiuje się najczęściej jako granicę ciągu $(1 + 1/n)^n$, gdy *n* zmierza do nieskończoności tj. $\lim_{n\to\infty} (1 + 1/n)^n = e$

Określenie to potwierdza, że źródłem jest tu ciąg geometryczny $(1 + 1/n)^n$ o ilorazie (co nieco większym od 1). Biorąc dostatecznie duże n i obliczając $(1 + 1/n)^n$, zbliżymy się do wartości 2,7182..., tj. do liczby *e*. Podobnie, jak w przypadku liczby π, *e* można otrzymać również jako wynik sumy nieskończonej, tj. sumy szeregu liczbowego:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

(tu $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \cdot (n-1) \cdot n$, $n \in N$, $0! = 1$).

Wzór ten daje dość szybko dobre przybliżenie wartości *e.*

Oprócz podanych określeń, *e* przedstawiane jest również w postaci iloczynów nieskończonych, czy też w postaci tzw. ułamka łańcuchowego.

Jak już było wcześniej zaznaczone, liczba ta odgrywa niezwykle ważną rolę w wielu działach matematyki, a w szczególności w analizie matematycznej, równaniach różniczkowych czy rachunku prawdopodobieństwa. Dzieje się to za sprawą funkcji wykładniczej $f(x) = e^x \equiv exp(x)$, tzw. funkcji eksponencjalnej i związanej z nią ściśle funkcji logarytmicznej $f(x) = lnx$ (tzw. logarytm naturalny z *x*). Funkcja eksponencjalna posiada bardzo wiele ważnych własności, a wśród nich np. taką, że tempo wzrostu funkcji jest równe jej wielkości, tj. $f'(x) = f(x)$ ($f'(x)$ – pochodna funkcji e^x). Oprócz tego wiele własności wynika z faktu, że partnerem liczby *e* jest logarytm naturalny (tj. $lnx = y \Leftrightarrow x = e^x$). Natomiast o ważności logarytmu naturalnego pisałam już w Kąciku matematycznym („O niezwykłej użyteczności logarytmu naturalnego” Pismo PG 8/2006). Tam też musiała pojawić się funkcja e^x.

Powracając jeszcze na chwilę do L. Eulera, oprócz wielu własności liczby *e* udowodnił też bardzo ważny wzór wiążący funkcję wykładniczą z trygonometrią, a mianowicie $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, $\varphi \in R$ *i – jednostka urojona*. Jest to abecadło matematyki wyższej. Pozwala zastąpić trygonometrię funkcją eksponencjalną. Stąd też pochodzi najpiękniejszy wzór matematyki $e^{i\pi} + 1 = 0$ wiążący pięć podstawowych stałych matematyki.

Użyteczność liczby *e* najlepiej jest wyjaśnić na przykładach.

Aby nie zanudzić czytelników, ograniczę się do dwóch.

Przykład 1. – **Pieniądze, ach pieniądze …**

No cóż, pieniądze są najczęściej tym, co nas podnieca. Dlatego warto wiedzieć co nieco, jak to jest z naszymi odsetkami lokat, nie mówiąc już o kredytach. A rzecz ma się następująco: już w XVII wieku wybitny matematyk Jakob Bernoulli (1654 – 1705) zabrał się do problemu procentu składanego. Tak, tak, tego, o którym czasami uczą nas w szkole. Jednak nie o nim będzie mowa, tylko o pewnej jego modyfikacji. W praktyce bankowej przyjęte jest podawanie stopy procentowej p% w stosunku rocznym, gdy okresem oprocentowania (tzn. okresem kapitalizacji) jest część roku – 1/k , k∈N gdy jest to kwartał to k = 4, gdy co miesiąc, k = 12. Czynnik oprocentowujący dany jest zależnością s = 1 + P/100k, zaś wartość końcowa kapitału $K_n = K_0 * s^n$, gdzie K_0 – kapitał początkowy. Oznacza to, że pod koniec pierwszego roku *(n = k)* wartość funduszu jest równa $K_k = K_0 * s^k$.

Wyjaśnijmy to jeszcze na konkretnym przykładzie. Załóżmy, że kapitał początkowy wynosi K_0 *= 5000 zł, p = 10%, k = 1* (kapitalizacja raz w roku), łatwo wówczas obliczyć, iż pod koniec roku mamy *5500 zł,* zaś gdy *k = 12* (kapitalizacja co miesiąc), to pod koniec roku mamy $K_0 * (1 + p/100 * 12)^{12} = 5000\,(1 + 1/120)^{12} = 5523{,}57$ zł (cóż, jest lepiej).

Jednak stajemy przed problemem porównania efektów przechowywania funduszy na kontach różniących się stopami procentowymi i okresem oprocentowania.

Dla celów porównawczych rozważa się tzw. efektywną stopę oprocentowania – $\tilde{p}$ i efektywny czynnik oprocentowania – $\tilde{s}$. Określa się je następującym związkiem

$$(1 + \frac{\tilde{p}}{100} = s^k = (1 + \frac{p}{100k})^k = \tilde{s}$$

Deponowanie funduszu na danym koncie jest tym korzystniejsze, im większa jest efektywna stopa oprocentowania – $\tilde{p}$% lub efektywny czynnik oprocentowania – $\tilde{s}$.

Analizując podany wzór, wnioskujemy, że skrócenie okresu oprocentowania (k – duże) powoduje wzrost efektywnej stopy oprocentowania i efektywnego czynnika oprocentowania. Krótko mówiąc, czynnik efektywnego oprocentowania $\tilde{s}$ (k) = (1 = p/100k) będzie rósł, gdy k rośnie. Zakładając tzw. ciągłą kapitalizację odsetek, tj. gdy ilość mieszczących się w pierwszym roku okresów procentowania dąży do nieskończoności (k→∞) mamy zgodnie ze wzorem Eulera czynnik ciągłego oprocentowania $\tilde{s}$:

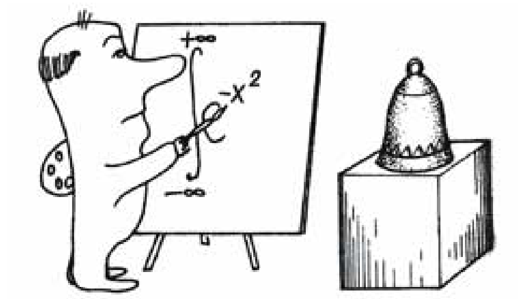
$$\tilde{s} = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{p}{100k})^k = e^{p/100}$$

(a więc mamy liczbę *e*).

Jest to najlepsze z możliwych osiągnięcie dla rocznego oprocentowania w skali rocznej. Dla rozważanych wcześniej danych otrzymalibyśmy pod koniec roku: 5000 * $e^{0{,}10}$ zł ≈5525,85 zł

Na zakończenie tego przykładu może warto podać jeszcze następujące zadanie:

Bank A przyjmuje roczne depozyty na konta oprocentowane 36% w stosunku rocznym, przy czym okresem oprocentowania jest rok (k = 1), zaś bank B przyjmuje roczne depozyty



Rys. K. Ciesielski, Z. Pogoda „Bezmiar metematycznej wyobraźni"

na konta oprocentowane 30% w stosunku rocznym, przy czym okresem oprocentowania jest miesiąc (k = 12). Bank C przyjmuje roczne depozyty na konta oprocentowane 32% w stosunku rocznym przy czym okresem oprocentowania jest kwartał (k = 4). Który z banków oferuje najkorzystniejsze warunki?

Chcąc prawidłowo odpowiedzieć na to pytanie, wyznaczmy dla każdego banku efektywny czynnik oprocentowania i efektywną stopę oprocentowania.

I tak dla banku A mamy:

$$\tilde{s}_A = 1 + \frac{36}{100} = 1{,}36$$

$$\tilde{p}_A = (\tilde{s}_A - 1)\cdot 100\% = 36\%$$

dla banku B:

$$\tilde{s}_B = \left(1 + \frac{32}{100\cdot 4}\right)^4 \cdot (1{,}025)^{12} = 1{,}344888$$

$$\tilde{p}_B = (\tilde{s}_B - 1)\cdot 100\% = 34{,}888\%$$

zaś dla banku C mamy:

$$\tilde{s}_C = \left(1 + \frac{32}{100\cdot 4}\right)^4 \cdot (1{,}08)^4 = 1{,}3648$$

$$\tilde{p}_C = (\tilde{s}_C - 1)\cdot 100\% = 36{,}48\%$$

Z przedstawionych obliczeń wynika, że najkorzystniejsze warunki daje bank C.

Przedstawione rozważania należy jednak zakończyć stwierdzeniem, że nie tylko my zarabiamy na oszczędnościach, ale i banki zarabiają na pieniądzach, które od nich pożyczamy. No cóż, tak to zwykle jest – jeśli oszczędzamy, to dobrze, zaś jeśli pożyczamy, to źle (oczywiście dla nas).

Przykład 2. – **Wzrost populacji**

Liczba *e* użyteczna w wyznaczaniu ciągłego wzrostu sumy na rachunkach bankowych nadaje się także do określenia innych rodzajów ciągłego wzrostu. Na przykład populację bakterii czy ludzi można postrzegać jako wzrastającą w sposób ciągły liczbę narodzin proporcjonalną do aktualnej ilości jednostek. Taką teorię zaproponował w 1798 r. brytyjski ekonomista Thomas Malthus w celu wyjaśnienia przyrostu ludności.

Nawiasem mówiąc, jego pracę cytował nie byle kto, tylko sam Karol Darwin.

W ramach tego prostego modelu populacji, liczba jednostek w danej chwili t oznaczona przez $P(t)$ dana jest wzorem $P(t) = P_0 \cdot e^{rt}$, gdzie P_0 jest populacją w tzw. chwili początkowej, tj. w momencie, gdy rozpoczęliśmy obserwację, zaś r jest stałą wzrostu. W wersji współczesnej wzór ten przedstawia rozwiązanie bardzo prostego równania różniczkowego $P'(t) = rP(t)$ z warunkiem początkowym $P(0) = P_0$. Jak wynika z podanego związku, wzrost populacji $P(t)$ zależy od funkcji eksponencjalnej. Można też zauważyć podobieństwo do wzrostu na ciągły przyrost zainwestowanej sumy bankowej. Zilustrujmy to jeszcze pewnym konkretnym przykładem. Załóżmy, że mamy $P(0) = 500$ bakterii na płytce Petriego, zaś po upływie 1 godziny jest ich już 800. Ile będzie bakterii po upływie 24 godzin? Zadanie to prowadzi do następujących zależności $800 = 500\, e^{rt}$ i $P(t) = 500\, e^{rt}$ gdzie t – 1 godzina. Stąd mamy $P(t) = 500\, e^{0{,}47t}$ i $P(24) = 500\, e^{0{,}47 \cdot 24} \approx 39600000$ bakterii.

Przedstawiony model wzrostu populacji jest najprostszym przykładem w ekologii i być może mało realistycznym. Natomiast stanowi punkt wyjścia do bardziej złożonych modeli. Przykładem jest tu tzw. równanie wzrostu logistycznego. Wzrost ten jest określony wzorem:

$$P(t) = \frac{P_0 K e^{rt}}{P_0 e^{rt} + K - P_0},$$

gdzie K oznacza poziom nasycenia nakładający pewne ograniczenie na wzrost. Jak łatwo można zauważyć, gdy $t \to \infty$, to $P(t) \to \infty$. Wzór ten potwierdza również występowanie liczby e. Cóż, w wielu zagadnieniach ekologicznych dość często pojawia się funkcja eksponencjalna.

Kończąc opowieść o liczbie *e,* nie można pominąć jej roli w rachunku prawdopodobieństwa. Mówiąc krótko, pojawia się ona tam na każdym kroku. Wystarczy przejrzeć podręczniki z rachunku prawdopodobieństwa, aby się o tym przekonać. W statystyce matematycznej jeżeli jakiś wzór jest ważny, to prawdopodobnie zawiera liczbę *e*.

O liczbie *e* można by pisać długo, ale sądzę, że także powyższa garść informacji wystarczy do zwrócenia uwagi na jej istnienie i rolę jaką ona odgrywa.

Należy się więc pełen szacunek liczbie *e* i być może najwyższy czas, aby poznali ją uczniowie szkół ponadgimnazjalnych.

Krystyna Nowicka
CNMiKnO

P.S. Podobnie jak w przypadku liczby π, istnieją przemyślne sposoby pomagające zapamiętać rozwinięcie dziesiętne liczby *e*. Wystarczy, na przykład, zapamiętać zdanie „By ochoczo i sprawnie ją poznawać i pamiętać, to wspomnij ówże tekst". Suma liter poszczególnych wyrazów daje kolejne cyfry rozwinięcia (2,71828182845).

Spacer dawnym nasypem kolejowym
(Oliwa – okolice Kiełpinka) – uzupełnienie

Już w trakcie redagowania artykułu pt. „Spacer dawnym nasypem kolejowym (Oliwa – okolice Kiełpinka)", zamieszczonego w nr. 10/2010 Pisma PG, a zwłaszcza po jego opublikowaniu, otrzymałem zapytania odnośnie występowania w opisanym rejonie Gdańska gatunków pod ochroną oraz z tzw. czerwonej listy. Zagadnieniem obecności rzadkich grzybów był zwłaszcza zainteresowany przedstawiciel firmy z Katowic, koordynującej badania ekofizjograficzne prowadzone w tym miejscu. Stąd niniejsze krótkie sprawozdanie, zawierające wyniki badań grzybów i niektórych interesujących roślin, uzupełnione wykazem fauny owadów otrzymanym od dr. Sławomira Zielińskiego. Przed laty wspólnie z nim opublikowaliśmy na łamach niniejszego miesięcznika nasz artykuł o błędnym nazewnictwie, stosowanym w prasie poruszającej tematykę przyrodniczą. Jestem w posiadaniu szczegółowego planu budowy tej linii, łącznie z naniesionym pasem technicznym, ale nie dostałem od wspomnianej firmy pozwolenia na opublikowanie tego materiału.

Wykaz stanowisk rzadkich, chronionych gatunków rosnących w rejonie pasa technicznego projektowanej linii Kolei Metropolitalnej; na mapce są oznaczone kolejnymi liczbami 1–14

Owocniki wegetatywne (pałeczki z jasną główką - anamorfy) i generatywne (teleomorfy) bardzo rzadkiego grzyba Holwaya mucida. W Polsce znany jest zaledwie z 4 miejsc, m.in. występuje w Puszczy Białowieskiej. *Fot. M. Wilga*