



Kącik matematyczny



Hazard – to ostatnio jedno z najmodniejszych słów. Przyczynił się do tego zarówno kryzys ekonomiczny, jak i polityka. Ekonomiści w Polsce i na świecie szukają skutecznych metod wyjścia z kryzysu. Liczba diagnoz dorównuje liczbie proponowanych terapii. A to dość często przypomina poradnik hazardzisty. W dobie kryzysu najpewniejszym sposobem zarobku wydaje się... hazard, a już najlepiej, gdy jest podparty naukowymi, a może i prawnymi zasadami. I tak zrodziła się nam „afera hazardowa”.

Matematyka w hazardzie, czy hazard w matematyce?

Kasyna nie są instytucjami charytatywnymi, a loterie organizuje się po to, aby na nich zarobić. Warto o tym pamiętać wypełniając kolejny kupon totolotka.
Piotr Wołowik („Wiedza i Życie”)

Wypracowane z biegiem lat teorie i metody rachunku prawdopodobieństwa znalazły liczne zastosowanie, ukazując jednocześnie niebywałą skuteczność matematyki. Kasyna i loterie są stabilnymi (dochodowymi) przedsiębiorstwami zbudowanymi na przestrzeniach probabilistycznych, może więc warto poznać rachunek prawdopodobieństwa jako model „przypadku”.
Jarosław Górnicki (matematyk)

Nie ma się czemu dziwić iż w długim okresie, gdy fortuna tu i ówdzie odmieńa swój bieg, pojawiają się liczne zbiegi okoliczności.
Plutarch (filozof grecki).

Już nie dość Ci grać jak i twoi rówieśnicy w kości, lecz do szulerni pchasz się na hazardy!
Herodondas (III w.p.n.e.)

Chęć wzbogacenia się w możliwie krótkim czasie i możliwie małym kosztem, to od niepamiętnych czasów siłą napędową wielu poczynań ludzkich. Takie zaś możliwości dają gry hazardowe, gdzie stawką są pieniądze lub inne dobra. Co więcej występujące tam ryzyko bardzo pobudza ludzką wyobraźnię.

Gry są częścią natury ludzkiej i nieodłącznym elementem każdej cywilizacji. Ludzie grali w różne gry od niepamiętnych czasów i od zawsze je wymyślali. Stąd, na przestrzeni wieków powstały ich setki. Nie jest więc możliwe omówić je wszystkie, a co więcej ich udziału w hazardzie (poza pewnymi wybranymi). Dlatego jedynie postaram się podać pewne fakty z historii gier hazardowych, oraz omówić związki matematyki z hazardem.

Odkrycia archeologiczne wskazują, że już kilka tysięcy lat przed Chrystusem były znane różne gry. Potwierdzeniem tego są żetony i tablica sumeryjska (ok. 4 tys. lat p.n.e.) znajdująca się w British Museum. Z tamtych czasów pochodzi też gra hazardowa w astragale. Były to kamyki mające 4 strony i każdą z odpowiednią ilością oczek. Wykorzystywano je nie tylko do gier, ale i do wróżb, a nawet do podejmowania decyzji (opisy tych ostatnich spotykamy w *Biblii*).

Znacznie później pojawiły się kostki sześciennie lub prostopadłościennie. Stały się one źródłem gier hazardowych zarówno

w Starożytnej Grecji, jak i w Starożytnym Rzymie. Znany jest fakt z życia cesarza Kaliguli (12-41 r. n.e.), który będąc namiętnym hazardzistą zrujnował skarb państwa. Następni cesarze rzymscy też nie byli lepsi i również uprawiali hazard.

W średniowieczu była rozpowszechniona gra hazardowa w trzy kości. Jednak chrześcijaństwo zaczęło walczyć z hazardem. W 813 roku sobór w Moguncji nałożył ekskomunikę na wszystkich katolików oddających się hazardowi.

W XIII wieku za sprawą wyprawy Marco Polo docierają z Chin gry w karty. Początkowo były one dwukolorowe, a dopiero później stały się czterokolorowe. Legenda głosi, że 4 kolory – to 4 pory roku, 12 figur – to dwanaście miesięcy, a 52 karty – to 52 tygodnie.

I tak rozpoczął się okres gier hazardowych w karty w Europie i na świecie.

Pierwsza historyczna wzmianka o kartach pojawiła się w Polsce w 1456 roku i jest jednocześnie zakazem ich używania. Natomiast wiadomo, że król Zygmunt Stary nazywany był królem karciarzy. Za namiętnych hazardzistów uznani byli królowie: Henryk Walezy i Zygmunt III Waza. Hazard cieszył się również ogromną popularnością za czasów saskich.

Wiek XVI i XVII w Europie to całkowite szaleństwo karciane. Dla wielu było to źródłem utrzymania i sposobem na życie.

Wiek XVIII przyniósł nowe formy gry w karty, a mianowicie gry o charakterze logicznym. Natomiast od połowy wieku XIX ważne były gry koncepcyjne. Triumf święcił wist, potem preferrans, a następnie wint bezpośredni przodek dzisiejszego brydża.

Dziś na początku XXI wieku karty są wciąż popularne (ach ten poker czy oczko!).

Znana obecnie gra w ruletkę też pochodzi prawdopodobnie z Chin. W Europie została upowszechniona dzięki matematykowi B. Pascalowi (1623–1662), który skonstruował przyrząd służący do tej gry.

Z zamiłowania do gier hazardowych, a w tym do ruletki, słynęła królowa Maria Antonina (1755–1793). Natomiast król francuski Ludwik Filip I (1773–1850) zakazał gry w ruletkę, czym oczywiście przyczynił się do jej rozpowszechnienia.

Stolicą hazardu, a w tym ruletki, stało się Monaco (od 1863 roku). O hazardzie na ziemiach polskich są wzmianki pochodzące z 1889 roku, kiedy w Tarnowie założono Stowarzyszenie Kasynowe.

Nie należy oczywiście zapominać o Sopocie. Partyjka wista, rozgrywka bilardowa – takie to były początki hazardu w Sopocie. Pomieszczenia do tych gier znajdowały się w Domu Zdrojowym (powstał ok. 1824 roku).

Z opowieści różnych pamiętników czy romansów wiadomo, że w wista czy w bilard można było przegrać pół wsi z dworem, a nawet ukochaną narzeczoną. Jednak dopiero po I wojnie światowej hazard w Sopocie nabral rumieńców. Ciągnęli tam bogaci utracjusze zarówno z Polski, jak i z całej Europy.

W ruletkę grano od 11 rano do pierwszej w nocy, a w bakarata nawet do ósmej nad ranem. Strój obowiązywał dowolny ale przyzwoity. Dopiero w 1931 roku, kiedy otwarto nowe sale do gry, wymagany był strój wieczorowy. A gdy już delikwent wybrał stolik, zaczynało się szaleństwo gry. Padały fortuny pod zastaw, zastawiano też pałace, dwory, kamienice, czasem też żony i kochanki. Dlatego wczesnym rankiem służby porządkowe dość często znajdowały wiszące ciała graczy w alei Parku Północnego, (zwanej Aleją Wisielców), czy też ciała wyrzucone na plażę przez morze.

Kasyno w Sopocie było czynne do czasów II wojny światowej włącznie. Nawet wojna nie przerwała hazardu. W 1945 roku Dom Zdrojowy wraz z Kasynem spłonął. Ale tradycja gier przetrwała w Grand Hotelu chociaż tylko w podziemiu. Od 1990 roku można już oficjalnie tracić pieniądze w kasynie.

Jeszcze kilka zdań o równie modnym jak ruletka w Black-Jacku. Jest to gra francuska pochodząca z XVIII wieku. Była znana w Paryżu pod nazwą „21”. Amerykańska nazwa wzięła się prawdopodobnie od premii wypłacanej, gdy gracz otrzymał „J” i asa pik—obydwie „czarne karty”.

Obecnie hazard ma wiele twarzy od automatów w rodzaju „jednoręki bandytów” przez bakarata, bingo, ruletkę, pokera, lotto, zakłady bukmacherskie, zakłady na wyścigach, czy wiele, wiele innych.

Gry w kasynach różnią się od innych tym, że przeciwnikiem jest kasyno—partner zawsze chętny do gry. Oprócz tego żadne kasyno nie oferuje gry, w której partner miałby równe szanse wygrania, jak i porażki. Stolicą kasyn, jak i hazardu jest oczywiście Las Vegas (od 1940 roku).

No i przyszedł czas na związki hazardu z matematyką. Pojawiały się one wraz z poszukiwaniem zwycięskiej strategii w grze. Pewne narzędzia z matematyki wydawały się być użyteczne, a inne trzeba było stworzyć.

W 1499 roku franciszkanin Tomasz Murner zajął się związkiem kart z matematyką. Będąc w Paryżu trafił na wykład Lefèvre’a d’Étaplesa, który na talii kart uczył tajników matematyki. System ten na tyle spodobał się Murnerowi, że sam opracował prawa logiki za pomocą kart.

W XVI wieku pojawiają się pierwsze systematyczne rachunki dotyczące szans wygrania prowadzone przez G.Cardano (1501–1576), N.Fontanę (1500–1557), zaś Galileusz (1564–1642) napisał nawet traktat: *Rozważania nad grą w kości*.

Natomiast nie ulega wątpliwości, że to gry hazardowe zainspirowały do powstania w XVII wieku rachunku prawdopodobieństwa – nowej gałęzi matematyki. Za „ojca” prawdopodobieństwa uważa się matematyka B. Pascala (1623–1662). Teoria ta początkowo miała ułatwić bogatym arystokratom wygrywanie pieniędzy w grach hazardowych. Pascal podszedł do tego profesjonalnie i odniósł sukces. Jego kariera nie trwała jednak długo. W wyniku przeżycia duchowego w 1654 roku został teologiem. Podał wówczas dowód na istnienie Boga (zwanym obecnie zakładem Pascala). Odwołał się w nim do gry hazardowej i analizował wartość oczekiwaną wiary w Chrystusa (tak jak w teorii prawdopodobieństwa). Z jego rozważań wynika, że wartość oczekiwaną bycia ateistą jest minus nieskończoność. Jest

to najgorszy możliwy wynik. Dlatego też stwierdził, że rozumny człowiek powinien zostać chrześcijaninem.

W związku z poglądami B. Pascala w 1837 roku S.P. Poisson (1781–1840) wydał książkę *Problemy gier hazardowych postawionych surowemu janseniście przez człowieka światowego*.

I tak powoli tworzyły się zręby nowej części matematyki – rachunku prawdopodobieństwa.

Należy jeszcze wspomnieć o pracy CH. Huygensa (1629–1695) z 1657 roku *O rachubach w grze w kości*. Jest ona chyba pierwszym dojrzałym dziełem pokazującym specyficzne pojęcia i metody tej nowej gałęzi matematyki.

Wiek XVIII i XIX to próby zarówno zastosowania w rachunku prawdopodobieństwa, narzędzi z innych działów matematyki (np. z analizy matematycznej), jak i próby stosowania tej teorii do różnych zagadnień praktycznych.

Dopiero w XX wieku powstały matematyczne podstawy teorii prawdopodobieństwa. W 1933 roku radziecki uczonec A. Kołmogorow sformułował ogólnie dziś przyjęte definicje, aksjomaty i twierdzenia.

Podsumowując, to pewne gałęzie matematyki zawdzięczają swój rozwój badaniom jakie podjęto w związku z różnymi grami hazardowymi. Są to na pewno rachunek prawdopodobieństwa, a w tym kombinatoryka i statystyka oraz teoria gier.

Teoria gier – to dział matematyki zajmujący się badaniem optymalnego zachowania się jednostek, organizacji, gatunków w przypadku konfliktu interesów. Podstawowym pojęciem jest tu tzw. równowaga Nasha (matematyk, o którym był film *Piękny umysł*).

Decyzje podejmowane w wielu życiowych sytuacjach nie różnią się w swej naturze od decyzji w grach hazardowych.

Czy więc warto rozpatrywać z naukowego punktu widzenia gry hazardowe? Warto, nie tylko dlatego, że rozwija to znajomość rachunku prawdopodobieństwa i kombinatoryki, ale również dlatego, że doświadczenie i wiedza zebrana w grach hazardowych przyczyniły się także do powstania wielu różnych pojęć współczesnej wiedzy i techniki. Dobrym przykładem jest tasowanie kart, które nie tylko ma związek z procesami mieszania w technologii chemicznej, ale wiąże się także z procesami termodynamiki. A tak nawiązując do tasowania kart, którym interesowali się głównie szulerzy i iluzjoniści zainteresowali się nim również i matematycy. Tasowanie doskonałe, binarne czy potęgowe to pojęcia związane z kombinatoryką. W analizie ich użyta jest również teoria grup. Najwybitniejszym specjalistą zajmującym się matematycznym ujęciem tasowania kart jest amerykański matematyk Persi Diakonis (swego czasu był iluzjonistą). Obecnie tasowaniem kart w kasynach zajmują się w większości maszyny.

Potrzeba wygrania zrodziła też tzw. „pewne systemy”. I tak w cenie od kilku do kilkuset złotych można kupić w Internecie „absolutnie pewne systemy” gwarantujące wygrane w Lotto czy Multilotka.

Trzeba jednak pamiętać, że wszelkie gry są tak skalkulowane, aby stanowić źródło dochodu instytucji która je proponuje, nigdy straty. Dlatego to gry stanowią źródło dochodu dla kasyna. Matematycy mówią, że gry w kasynie mają ujemną wartość oczekiwaną. Wartość oczekiwana określa średni zysk na jedną partię przy założeniu, że rozgrywamy nieskończoną liczbę kolejek. Wyraża ją formuła

$$E(X) = p \cdot x_{zysk} + (1 - p) \cdot x_{strata}$$

gdzie p – określa prawdopodobieństwo osiągnięcia zysku, a $1 - p$ prawdopodobieństwo straty.

Dla przykładu załóżmy, że rzucamy monetą i dostajemy złotówkę za każdym razem, gdy wypadnie orzeł i tracimy złotówkę, gdy pojawi się reszka. Wówczas wartość oczekiwana wygranej wynosi:

$$E(X) = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot (-1) = 0$$

Jest to tzw. gra sprawiedliwa, która w kasynach nie występuje.

A teraz trochę matematycznych uwag o znanych grach. Zaczniemy od Toto-Lotka. Skreśla się w nim 6 liczb spośród 49 liczb. Wszystkich sposobów skreśleń jest w przybliżeniu około 14 milionów. Szansa wygrania „szóstki” jest więc bardzo mała. Byłaby ona bardzo duża gdyby wysłać około 9,7 milionów kuponów. W rzeczywistości liczba nadsyłanych kuponów jest rzędu 7 milionów i dlatego największe wygrane padają rzadziej. Obliczenia są przeprowadzone przy założeniu, że grający skreślają przypadkowo, ale tak nie jest. Okazuje się, że grający częściej skreślają liczby w środku kwadratu, aniżeli w rogach czy przy brzegu (dążąc aby liczby były rozsiane równomiernie).

Wybitny polski matematyk Hugo Steinhaus zalecał obstawiać w Toto-Lotku liczby leżące na skraju kuponu. Wybierając bowiem kombinacje „niepopularne” mamy co prawda taką samą szansę trafienia jak przy kombinacjach „popularnej”, ale w razie wygranej nie będziemy się nią dzielić.

Spśród gier, w których warto śledzić ciąg wyników i gdzie „przeszłość” ma wpływ na kolejne etapy gry jest Black-Jack. Wyjaśnia to prawdopodobieństwo warunkowe. I tak prawdopodobieństwo wyciągnięcia z talii kart 2 asów jeden po drugim jest $\frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51}$ ($\frac{4}{52}$ – prawdopodobieństwo wylosowania asa za pierwszym razem, $\frac{3}{51}$ – prawdopodobieństwo wyciągnięcia asa w drugiej próbie pod warunkiem, że za pierwszym razem był as).

Prawdopodobieństwo warunkowe stało się podstawą rozmaitych strategii Black-Jacka. Polegają one głównie na śledzeniu ile kart każdego rodzaju zostało wyciągniętych. Jednak wszystkie Black-Jackowe systemy wygrywające wymagają niewiarygodnej pamięci (nie wolno robić notatek). Trzeba zapamiętać wszystkie schodzące z talii karty i przeprowadzić skomplikowane rachunki. Powstały nawet na ten temat filmy takie jak *21* czy *Rain Man*.

A teraz trochę o bilardzie. Dla zwykłego człowieka bilard kojarzy się z miłym sposobem spędzania wolnego czasu lub traceniem pieniędzy. Dla matematyka bilard dostarcza rozrywki innego rodzaju. Analiza stołu bilardowego i trajektorii poruszającej się kuli, to analiza pewnego układu dynamicznego. Ważną klasę stanowią tzw. bilardy rozpraszające, których brzeg składa się z wklęsłych kawałków. Są one przykładem chaotycznych układów dynamicznych.

No i powoli kończąc opowieści o grach, jeszcze o ruletce. W ogólnym zarysie gra polega na typowaniu liczby lub koloru na którym zatrzyma się kula. Powstaje pytanie czy można tak określić strategię gry, aby gdy obstawiamy tylko kolor zwiększyć prawdopodobieństwo wygranej? Niestety wartość oczekiwana wygranej jest mniejsza od zera i wynosi (-0,027). Oznacza to, że grając odpowiednio długo stracimy na rzecz kasyna 2,7 % stawianej puli. Nie mniej ciągle powstaje mnóstwo nowych strategii wygrywających.

Jeśli zaś chodzi o systemy w innych grach, to znana jest historia amerykańskiego matematyka Edwarda O. Thorpa, który wykładając w Los Angeles postanowił ferie zimowe spędzić

w Las Vegas. Niestety miał pecha i przegrał wszystkie swoje pieniądze w kasynie. Grał w grę zwaną siedemnaście i cztery (gra w karty). Rozgoryczony przegraną zaczął obmyślać strategię. Opracował ją przy pomocy komputera (z M.I.T.). Strategia ta zapewniała grającemu kilka procent przewagi nad kasynem. Przyjął pieniądze do wypróbowania swojej strategii i wkrótce zaczął wygrywać znaczne pieniądze. Wieść o jego wygranej szybko się rozeszła, kasyna zaczęły zamykać przed nim drzwi. Musiał więc zrezygnować z praktycznego wykorzystania swego systemu. Zemścił się jednak na kasynach w ten sposób, że opisał ten swój system w książce i wydał ją. I tak to kasyna w Newadzie zmuszone były zmienić przepisy gry w sposób radykalny. Tym samym strategia stała się nieaktualna.



Wśród graczy pewną popularnością cieszą się systemy polegające na stosowaniu stawek progresywnych i określaniu zasad progresji. Dla przykładu:

- stawkę podwajamy po każdej przegranej, zaś po każdej wygranej wracamy do stawki minimalnej;
- stawkę podwajamy po każdej wygranej i powracamy do stawki minimalnej po każdej przegranej.

Zdecydowanie niekorzystna dla gracza jest tzw. ostrożna gra, która polega na stawianiu możliwie najniższej stawki. Zgodnie z mocnym prawem wielkich liczb prowadzi to do ruiny gracza.

Wprawdzie systemy istnieją i (działają), ale nie likwidują (bo nie mogą) przewagi kasyna nad graczami. Kasyna muszą chronić się przed bankructwem. Oczywiście wiara gracza, że zły los kiedyś w końcu się odwróci, nie daje gwarancji wygranej. A jeśli mamy „kosmicznego pecha”, możemy przegrywać nawet kilkadziesiąt razy z rzędu. To oznacza tylko bankructwo, czyli „piękną katastrofę” jak mawiał Grek Zorba.

Należałoby jeszcze wspomnieć o „hazardzie” w pracy naukowej matematyka. W czasach, gdy ukazuje się ponad 9 tysięcy publikacji na świecie w ciągu miesiąca, trudno jest osiągnąć znaczące wyniki. Tymczasem wymaga się wydajnej pracy, a miara tej wydajności jest liczba publikowanych rocznie prac. Jeśli przez powiedzmy 5 lat nic nie opublikujesz, to właściwie koniec pracy naukowej. Dlatego większość chwytta mniejsze i łatwiejsze problemy do rozwiązania. Nie mniej od czasu do czasu pojawia się coś tak niezwykłego jak dowód Wielkiego Twierdzenia Fermata (który czekał od XVII wieku). **I to jest ta Wielka Wygrana!** Jest też jeszcze pewna ilość hipotez do udowodnienia, za dowód których oprócz sławy można uzyskać 1 milion dolarów. Trochę mniejsze pieniądze można wygrać za znalezienie większej liczby pierwszej niż obecnie znana (bo tylko 100 tysięcy lub 150 tysięcy dolarów).

Podejmując się zatem pracy naukowej w matematyce rozpoczynamy grę, która też ma charakter hazardowy.

Krystyna Nowicka

Centrum Nauczania Matematyki i Kształcenia na Odległość

PS. Aha, przeczytałam ostatnio taki oto humor z zeszytów szkolnych: „Melchior Wańkowicz opisał bitwę o kasyno, zwaną Monte”. No cóż, tak to bywa z naszą wiedzą, ale czy życie nie jest hazardem?