Wykazano więc, że:

$$C^2 = A^2 + B \cdot b.$$

Nietrudno zauważyć, że dla $\gamma = 90^\circ$ i b = B, otrzymuje się

$$C^2 = A^2 + B^2,$$

zaś dla $\gamma = 45^\circ$

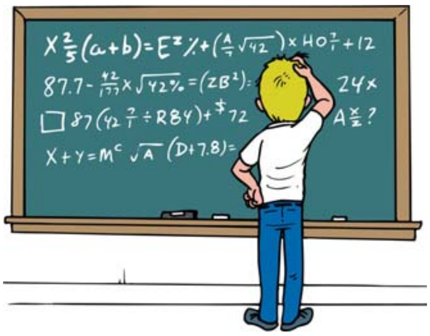
$$C^2 = A^2,$$

co oznacza trójkąt równoramienny.

Podsumowując powyższe, można postulować, że zaprezentowana tutaj nowa forma wzoru Carnota lub wzoru cosinusów jest znacznie ogólniejsza i bardziej przydatna w geometrii, niż ta stosowana obecnie. Wyeliminowanie znajomości funkcji trygonometrycznych α, β lub γ umożliwiło nam (w swoim czasie) wyprowadzenie nowych zależności na uogólnione współczynniki konfiguracji oraz zastosowanie transformacji powierzchniowej w teorii radiacyjnej wymiany ciepła.

Niniejszy artykuł dedykuję pamięci, będącego współautorem wspomnianej wcześniej publikacji, nieżyjącego już prof. dr. hab. inż. Czesława Buraczewskiego, kierownika Katedry Techniki Cieplnej w latach 1965–1974.

Jan Stąsiek
Wydział Mechaniczny



Kącik matematyczny

Tak oto zbliżamy się powoli do przerwy wakacyjnej, a więc czasu urlopów i wypoczynku. W ostatnich latach stał się modny wypoczynek aktywny. Najczęściej oznacza to wysiłek fizyczny. Może jednak dobrze byłoby urozmaicić go wysiłkiem umysłowym. No, może nie od razu jakiś wyczyn, ale tak, aby mózg nie „zardzewiał”. Zresztą, współczesne badania mózgu potwierdzają fakt, że należy go systematycznie ćwiczyć. Sądzę, że matematyka bardzo dobrze się do tego nadaje. Mamy bowiem i „lżejszą” jej wersję. Czas więc, aby w kąciku matematycznym coś na ten temat napisać.

Gry i zabawy z matematyką

Nie ma cywilizacji bez gier. H. Steinhaus
Nigdy nie obawiaj się usiąść na chwilę, aby pomyśleć.
L. Hansberry

Jest to temat niezwykle obszerny i trudno byłoby mi omówić go tu wyczerpująco. Chcę jedynie zwrócić uwagę, że istnieje część matematyki, która służy zabawie. Co więcej, zachodzi dziwne zjawisko, bowiem wiele osób twierdzących, że nie znosi matematyki, jednocześnie interesuje się grami czy zabawami mającymi charakter logiczny czy matematyczny.

Fakt, zabawa jest podstawową i naturalną formą działalności ludzkiej. Należy ona do zwyczajnych potrzeb człowieka, poczynając od wieku dziecięcego. Świadczy o tym wiele gier planszowych.

Gry i zabawy matematyczne dość często uczą w łagodny sposób podstaw matematyki. Wymagają także logicznego myślenia, organizacji pracy, zachęcają do śmiałych rozwiązań i pomysłowości. Co więcej, nie wymagają one specjalnych urządzeń i pracochłonnych przygotowań. Nie jest ważne, czym się gra, ale w jaki sposób się gra. Gra jest także wysublimowaną walką, co też decyduje o jej atrakcyjności.

Upodobanie do układania gier i uczestniczenia w nich pojawia się od zarania cywilizacji. Od tysiącleci istnieją gry nasycone nie tylko elementami samej zabawy, ale wymagające od graczy wysiłku intelektualnego.

Gry na planszy, gry w karty, gry strategiczne, zabawy kostką, guzikami i zapałkami, różnorodne węzły, mistrzowskie cięcia, czyli tzw. tangramy – są ich setki i tysiące.

Treningiem dla umysłu i rozwoju intelektu jest także rozwiązywanie łamigłówek. Nie są one kłopotliwe rachunkowo, ale wymagają dużej pomysłowości. Różnorodne łamigłówki liczbowe stanowią część magazynu (*British Mensa Magazine*) klubu międzynarodowego Mensa (którego członkowie muszą wykazać się wysokim ilorazem inteligencji). No cóż, systematyczny trening jest niezbędny. A więc do dzieła.

Kwadraty magiczne

Dawno, dawno temu Chińczycy byli zafascynowani tzw. „kwadratami magicznymi” – wypełnionymi liczbami całkowitymi. Są to kwadratowe tablice, w których wiersze, kolumny i główne przekątne mają tę samą sumę. Trudno jest ustalić datę ich powstania, istnieje jednak legenda, zgodnie z którą 5000 lat temu cesarz Yu skopiował kwadrat magiczny ze skorupy mitycznego żółwia.

Nie ulega wątpliwości, że starożytni Chińczycy byli mistrzami w tych liczbowych aranżacjach. Szczególne znaczenie miał dla nich kwadrat **3x3**, zawierający liczby całkowite od **1** do **3^2=9**. Każdy wiersz, każda kolumna i obydwie przekątne dają sumę 15. Przykładem jest kwadrat postaci:

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Oczywiście są i inne przykłady kwadratów **3x3**. Trudniejsze w konstrukcji są kwadraty **4x4** czy **5x5**. Wymagają one pewnej wiedzy matematycznej. Można znaleźć, ile powinna wynosić suma wierszy, kolumn czy dwóch głównych przekątnych w zależności od wymiaru (jak?).

Kwadraty magiczne intrygowały nie tylko Chińczyków. Można je spotkać w różnych miejscach i w różnym czasie. I tak na obrazie niemieckiego malarza Dürera z 1514 r. w prawym górnym rogu jest kwadrat magiczny **4x4**.

Znany jest także fakt, że Benjamin Franklin (amerykański mąż stanu 1760–1790) też wymyślał kwadraty magiczne, gdy nudna stawała się debata polityczna. A może by i naszym politykom polecić ten rodzaj zabawy…

A teraz 2 kwadraty magiczne, jeden **4x4**, zaś drugi **5x5** (trudny) dla Czytelników kącika matematycznego.

16			
	10		
			12
4			

Rys. 1

15				
			20	
	25			
				5
		10		

Rys. 2

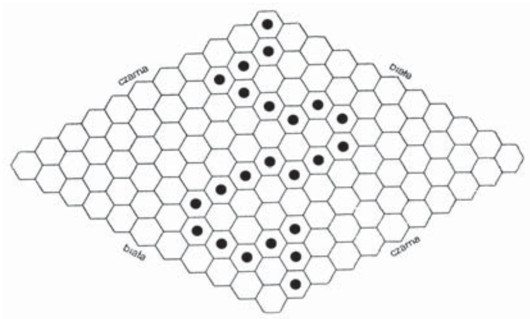
Wpisz brakujące liczby od 1 do 16 – *rys.1*, od 1 do 25 – *rys. 2*, w taki sposób, aby powstał kwadrat magiczny, w którym suma liczb w wierszach będzie równa 34 *(rys. 1)* i 65 *(rys. 2)*.

Motyw kwadratów logicznych i liczb całkowitych stał się podstawą innych gier, chociażby ostatnio bardzo modnej sudoku. Gra polega na wypełnieniu diagramu o wielkości **9x9** kratek, podzielonego na dziewięć kwadratów w taki sposób, aby w każdym wierszu i każdej kolumnie znalazły się bez powtórzeń cyfry od **1** do **9**.

Powstały także odmiany sudoku. Wszystkie one mają podobny charakter rozwiązań.

Gry planszowe

Gier planszowych jest tak ogromna liczba (i ciągle powstają nowe), że nie wystarczyłoby tu miejsca na ich omówienie. Dlatego opowiem o jednej z nich. Nazywa się ona Hex, wymyślił ją Duńczyk Piet Hein i opublikował w 1942 roku. Niezależnie od Heina na pomysł tej gry wpadł w 1948 roku John Nash (główny bohater filmu „Piękny umysł"). W grze biorą udział 2 osoby. Gra toczy się na planszy w kształcie rombu, którego bok składa się najczęściej z 11 sześciokątów. Dwie leżące naprzeciw siebie strony rombu nazywamy na przykład czarnymi, a dwóm pozostałym przypisujemy nazwę białych. Ponadto przyjmujemy, że sześciokąty leżące w wierzchołkach rombu należą do obu stron. Każdy gracz zaopatruje się w jednokolorowe żetony: jeden w białe, drugi w czarne. Gracze na zmianę kładą swoje żetony na sześciokątach, ale mogą kłaść je tylko na te komórki, które nie są zajęte. Gracz posługujący się kolorem czarnym dąży do tego, aby ułożyć z czarnych żetonów ciągły łańcuch pomiędzy dwiema stronami nazwanymi „czarne". Biały analogicznie. Łańcuch oczywiście może być pokręcony i powyginany w dowolny sposób, byleby tworzył linię ciągłą. Na przykład na przedstawionym rysunku pokazany jest taki łańcuch złożony z czarnych żetonów.



Wygrywa ten gracz, który pierwszy ułoży łańcuch o żądanych warunkach. Można zauważyć, że w tej grze jeden z graczy zawsze musi wygrać. Teoretyczne rozważania nad tą grą doprowadziły do interesującego wniosku. Chociaż nie jest znana strategia, która zapewniałaby zwycięstwo na standardowej planszy, to jednak istnieje dowód teoretyczny strategii zapewniającej wygraną pierwszemu graczowi na planszy o dowolnych wymiarach. Nie określa on jednak metody otrzymania tej strategii. Dowód tego faktu pochodzi od Johna Nasha (1949 r.).

Zadania liczbowe (i nie tylko)

Sądzę, że na zakończenie przyda się kilka ćwiczeń zadaniowych.

1. Butelka wina kosztuje 100 zł. Wino kosztuje o 90 złotych więcej niż butelka. Ile kosztuje butelka?
2. Adam i Ewa są rodzeństwem. Adam ma tyle sióstr ilu braci, zaś Ewa dwukrotnie więcej braci, niż sióstr. Jak liczne jest rodzeństwo?
3. Kiedy Jasio miał 3 lata, jego ojciec był o 5 lat starszy od jego mamy. Gdy miał 9 lat, jego mama miała 37 lat. Przed dwoma laty jego ojciec obchodził jubileusz swojego 60-lecia. Ile lat ma obecnie Jasio?
4. Jaka powinna być następna liczba w tym ciągu? **2, 13, 89, 610, 4181, 28657, …**
5. Na pierwszym zebraniu wyłoniono stu polityków. Każdy z nich był uczciwy bądź nieuczciwy. Znamy tymczasem dwa fakty:

1) co najmniej jeden z polityków był uczciwy,
2) co najmniej jeden z dwóch polityków był nieuczciwy.

Czy znając te fakty, można powiedzieć, ilu polityków było uczciwych?

Odpowiedzi proszę szukać w następnym numerze.

No cóż, kto wie, czy dobra książka z dobrymi zagadkami nie byłaby lekarstwem na lęk przed matematyką. Niestety, dość często mamy sytuację z piosenki (według słów Wojciecha Młynarskiego):

„Ruszają w dal pociągi dwa
Z miasteczka B do miasta A.
I z miasta A do miasta B
I mam wyliczyć, gdzie spotkają się.
Ich prędkość znam, odległość znam,
I wszystko wyznaczone mam…
Lecz to zadanie peszy mnie
I profesora oko złe…"

Oby takich sytuacji było jak najmniej.

Krystyna Nowicka
Studium Nauczania Matematyki

PS. Pyta nauczyciel Jasia, jak podzielić 5 jabłek między siedmioro dzieci. Na to Jaś – ugotować kompot.
Życzę dobrego wypoczynku i mam nadzieję, że moje pisanie o matematyce nie zniechęciło do niej.