japońscy, których wcześniej wykształcił.

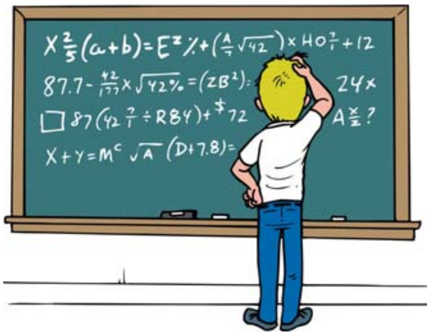
Ponadto, Magdalena Łukomska odbyła pod kierunkiem Profesora Nishino specjalistyczne studia podyplomowe.

Wydaje się, że w tej sytuacji należy dziś, raz jeszcze, podziękować Zmarłemu za Jego szczególne zasługi dla Politechniki Gdańskiej i złożyć Mu należny hołd.

Równocześnie, niech będzie mi wolno wykorzystać tę dzisiejszą smutną okoliczność, aby przekonać przygodnych krytyków, że strategia osobistych kontaktów międzynarodowych naszych ludzi nauki – która może rodzić się tylko poprzez ich wyjazdy zagraniczne – przynosi odpowiednie owoce, jeśli tylko się o to właściwie zadba.

Zbigniew Cywiński
Emerytowany profesor PG

Fot. 5



Kącik matematyczny

Maj – cudowny miesiąc. Miesiąc miłości i radości życia. Matematyka w maju przywodzi na myśl jedynie matury i to, że tak bardzo nie ma się ochoty na zajmowanie się nią. Ale cóż, czasy się zmieniają. Biorąc pod uwagę niezwykły rozwój wiedzy, to kto wie, czy w przyszłości nie będziemy mogli sterować swoimi uczuciami – nawet w maju. Stąd czas w kąciku matematycznym na modelowanie matematyczne.

Czy Romeo kocha Julię, czy Julia kocha Romea? – czyli o matematyce w modelowaniu –

Związki międzyludzkie są tym, co nadaje życiu wartość.
Wilhelm von Humboldt

Nie można się oprzeć wrażeniu, że formuły matematyczne mają niezależny od nas byt i inteligencję, że są mądrzejsze niż my sami, nawet mądrzejsze niż ich odkrywcy, i że możemy wywnioskować z nich więcej niż poprzednio w nich zawarto.
Heinrich R. Hertz (fizyk 1857–1894)

Matematyka kojarzy nam się najczęściej z liczbami. Jeżeli jednak zastanowić się chwilę, to każdy z nas mógłby podać wiele faktów stosowalności matematyki do rozwiązywania problemów świata realnego. Z roku na rok takie potrzeby wzrastają. Odnosi się wówczas wrażenie, że sama natura przestrzega reguł matematycznych. Takie podporządkowanie sugerowałoby, że świat jest jakoś ograniczony przez zasady matematyczne. Ale to nie jest takie proste, bowiem wiele zjawisk naturalnych zdaje się opierać rozwiązaniom matematycznym. I tak nie istnieje idealny model matematyczny pozwalający dokładnie przewidywać pogodę. Owszem, istnieją pewne modele opisujące pogodę, które z roku na rok są doskonalsze i coraz bardziej wyrafinowane (dzięki wzrastającym możliwościom obliczeń komputerowych). Dają one jednak wyniki tylko z pewnym prawdopodobieństwem. Niemniej, ciągle wzrasta stosowalność matematyki w opisie rzeczywistości.

Stąd też powstało dwojakie spojrzenie na matematykę jako naukę, w której spotykamy fakty tak „użyteczne”, jak i „nieużyteczne”. W związku z tym i matematycy dzielą się na tzw. „czystych”, to jest zajmujących się tylko teorią, jak i matematyków w dziedzinie zastosowań.

Matematyka to jak pewien krajobraz mający swoją geografię, po którym wędrują i wykorzystują go tak twórcy, jak i użytkownicy. Użytkownik matematyczny chodzi tylko po dobrze udeptanych ścieżkach, zaś twórca matematyczny bada nieznane zakątki, tworzy ich mapę i buduje przez nie drogi, aby uczynić dostęp dla innych. Dlatego sprowadzenie matematyki wyłącznie na pozycje użytkowe powoduje, że ignorujemy jeden z głównych przywilejów istoty ludzkiej – możliwości wzlotów intelektualnych dla samej przyjemności latania. Stąd stało się to motywem przedstawionych tu rozważań. Oprócz omówienia problemów modelowania matematycznego, troszkę pofantazjuję, co by było gdyby pewien model opisywał uczucia ludzkie, np. miłość Romea do Julii, czy Julii do Romea.

We współczesnym świecie spotykamy się dość często z efektami modelowania matematycznego, chociaż nie zdajemy sobie z tego sprawy. Jeżeli chcemy opisać otaczającą rzeczywistość, zrozumieć ją i móc przewidywać zachowanie się pewnych zjawisk, niezbędne jest modelowanie. Modelowanie jest rzemiosłem stanowiącym pomost między naukami przyrodniczymi a matematyką. Jest to trudne rzemiosło, ponieważ rzeczywistość jest bardzo złożona i po to, by można ją opisać, należy dokonać wielu uproszczeń i przybliżeń. Dlatego na początku próbuje się zrozumieć zachowanie prostych obiektów, które dawałyby możliwość odkrycia istotnych własności. Zbiór cech i wielkości charakterystycznych dla danego zjawiska, ustalenie reguł, które nim rządzą, daje tzw. *„model heurystyczny”*. Oprócz tego należy ocenić, które spośród zmiennych i parametrów są mierzalne doświadczalnie i mogą służyć do weryfikacji modelu. Trafność wszelakich wyborów oceniamy przez porównanie wyników uzyskanych przy użyciu modelu, z rzeczywistością.

W modelowaniu rzeczywistości wyróżniamy 3 etapy. Pierwszy etap, najtrudniejszy, to zbudowanie modelu heurystycznego. Tworzymy go na podstawie eksperymentów i rozważań czysto teoretycznych. Tak naprawdę jest on także odzwierciedleniem stanu wiedzy na temat danego zjawiska. Po zbudowaniu modelu heurystycznego następuje drugi etap: dopasowanie struktury matematycznej. Dość często jest to pewien układ równań. Tę strukturę matematyczną nazywa się modelem matematycznym. Powstały w taki sposób model powinien także podlegać weryfikacji doświadczalnej, tj. powinna istnieć możliwość porównania rozwiązania układu równań z danymi eksperymentalnymi.

Model matematyczny poprawnie skonstruowany powinien spełniać pewne warunki. I tak, gdy jest to np. układ równań różniczkowych, wymaga się, aby dla danego układu równań:

1) istniały rozwiązania,
2) rozwiązania były jednoznaczne,
3) rozwiązania były stabilne względem warunków początkowych i parametrów występujących w układzie.

Etap trzeci modelowania – to sprawdzenie różnych hipotez badawczych i wyciągnięcie wniosków. Ważna jest zgodność uzyskanych wyników z modelu matematycznego z rzeczywistością, którą miał opisać.

Załóżmy, że mamy poprawnie zbudowany model matematyczny zweryfikowany doświadczalnie; możemy wówczas na podstawie danych początkowych przewidywać zjawiska. Nie musimy dokonywać kolejnych pomiarów (które są często czasochłonne i kosztowne). Oprócz tego możemy przewidywać wpływ czynników zewnętrznych i optymalizować pewne procesy. I tak na przykład (biorąc pod uwagę szybko rozwijającą się matematykę w biologii), gdybyśmy tylko znali równania opisujące przebieg danej choroby, to za ich pomocą moglibyśmy ustalić optymalną dawkę leku, którą należy podać pacjentowi, aby otrzymać najlepszy efekt terapeutyczny.

Niestety, zbudowanie dobrego modelu matematycznego dla wielu zjawisk jest niezwykle trudne. Wymaga to ogromnej wiedzy i doświadczenia. Tu ewentualne błędy kosztują więcej.

Obszarem, w którym szczególnie w ostatnich latach spotyka się próby modelowania matematycznego, jest biologia, a w szczególności ekologia. Zajmuje się ona między innymi badaniem zmian liczebności danych populacji. Znana była idea mówiąca, że systemami ekologicznymi kieruje pewien rodzaj dynamiki. Początkowo zbudowano model opisujący dynamikę pojedynczej populacji. Najprostsza jego postać przyjmuje założenie, które mówi, że tempo przyrostu liczebności danej populacji jest wprost proporcjonalne do tej liczebności. Daje ono proste równanie różniczkowe, którego rozwiązanie ma postać wykładniczą.

Równanie tej postaci było jednak zbyt dalekim przybliżeniem rzeczywistości. Niemniej stało się ono źródłem dla wielu innych modeli, a między innymi dla tzw. modelu Lotki-Volterry. Ten zaś posłużył mi do jego „ludycznej interpretacji”, czyli rozwiązania problemu postawionego w tytule artykułu.

Na początku troszkę historii tego modelu. Zaczęło się od prac włoskiego biologa, U. d'Aneony, który badał ryby drapieżne w Adriatyku. Zauważył, że pod koniec I wojny światowej procent drapieżników wyraźnie się zwiększył. O pomoc w wyjaśnieniu tego zjawiska zwrócił się do swego teścia, matematyka V. Volterry.

Vito Volterra (około 1926 r.) zbudował matematyczny model dwóch populacji oddziałujących na siebie w sposób antagonistyczny *(drapieżnik-ofiara)*. Jest to uzasadnione wówczas, gdy liczebność jednej z populacji *(populacja ofiar)* jest kontrolowana głównie przez drugą *(populacja drapieżników)* i jeżeli dominującym składnikiem pożywienia drapieżnika są osobniki populacji ofiar.

Przy odpowiednich założeniach model matematyczny przyjął postać układu 2 równań różniczkowych zwyczajnych. Analiza tego układu dała wiele istotnych odpowiedzi. Między innymi zostało stwierdzone, że jeżeli układ nie znajduje się w stanie równowagi, to liczebności obu gatunków powtarzają się cyklicznie. Dlatego w czasie wojny, gdy ludzie nie łowią ryb, liczba populacji ryb (ofiar), którymi żywią się ryby drapieżne, jest większa. Wzrasta wówczas liczba ryb drapieżnych (mają co jeść). Ale gdy ryb drapieżnych jest za dużo, to nie wystarcza pożywienia i ich liczba się zmniejsza (wymierają). Następuje wówczas wzrost populacji ofiar i cały cykl może rozpocząć się na nowo.

Równolegle do prac V. Volterry taki sam model zbudował A. J. Lotka (1925 r.) do opisu reakcji chemicznej. Stąd powstała nazwa modelu – model Lotki-Volterry.

Model miłości Romea i Julii

Wykorzystując opis wzrostu populacji, a w szczególności dwóch populacji oddziałujących na siebie, spróbuję podać model matematyczny miłości Romea i Julii.

Oznaczmy wielkość natężenia miłości Romea do Julii przez MRJ, zaś Julii do Romea przez MJR. Do opisu natężenia miłości między nimi można przyjąć układ podobny do układu Lotki-Volterry.

Wersja opisowa modelu:
tempo wzrostu: $MRJ=A\bullet MRJ+B\bullet MRJ\bullet MJR$
tempo wzrostu: $MJR=C\bullet MJR+D\bullet MRJ\bullet MJR$
(gdzie A, B, C i D są pewnymi parametrami)
Wersja matematyczna:
Niech $x=x(t)$ – wielkość natężenia miłości Romea do Julii w chwili $t(x\equiv MRJ)$, zaś $y=y(t)$ – natężenie miłości Julii do Romea w chwili $t(y\equiv MJR)$.

Szybkość zmian funkcji w matematyce wyraża się przez pochodną tej funkcji. Stąd wersja opisowa przyjmie postać układu 2 równań różniczkowych:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = Ax + Bxy \\ \dfrac{dy}{dt} = Cy + Dxy \end{cases}$$

Układ taki rozważa się zwykle wraz z tzw. warunkami początkowymi $x(0)=x_0$, $y(0)=y_0$. Jest to wielkość natężenia miłości w chwili początkowej $t=0$. Przedstawiony tu układ równań jest niestety nieliniowy (trudności w rozwiązaniu). Można jednak skorzystać z analizy własności rozwiązań na tzw. płaszczyźnie fazowej.

Występujące stałe liczbowe A, B, C i D mogą być tak dodatnie, jak i ujemne, w zależności od charakteru natężenia miłości między kochankami. Wybierając zatem różne znaki współczynników, otrzymamy serię różnych modeli opisujących współoddziaływanie między różnym charakterem miłości. No cóż, analiza takich układów dałaby prawdopodobnie wiele ciekawych spostrzeżeń co do ich miłości.

Ciekawym przykładem jest także układ liniowy:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = Ax + By \\ \dfrac{dy}{dt} = Cy + Dx \end{cases}$$

Wtedy może zdarzyć się uzyskanie „miłości ujemnej”, tj. nienawiści. Rzeczywiście, jeżeli w takim modelu przyjmiemy, że Romeo kocha Julię tylko wtedy, gdy ona jest mu niechętna, tj. w układzie $A=0$, $B<0$, natomiast Julia odpowiada miłością tylko na miłość Romea, tj. w układzie $C=0$, $D>0$, wówczas okazuje się, że model opisujący historię ich związku wygląda następująco:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = By \\ \dfrac{dy}{dt} = Dx \end{cases}$$

skąd można otrzymać 1 równanie np. $\ddot{x} = \dfrac{d^2x}{dt^2} = BDx$, $BD<0$

To typowy oscylator harmoniczny (wahadło). Oznacza to też, że powtarza się cykl uczuć miłości i nienawiści. Niemniej, przez $^1/_4$ cyklu partnerzy kochają się.

Inne układy, jak i ich interpretacje, pozostawiam Czytelnikom, tym bardziej, że istnieją symulacje komputerowe układu Lotki-Volterry. Można także zatrudnić zaprzyjaźnionego matematyka lub informatyka.

Takie zabawy modelami pojawiały się już w wielu artykułach popularnonaukowych pisanych przez matematyków (bo matematycy lubią się bawić).

Mam cichą nadzieję, że jeszcze raz udało mi się zwrócić uwagę na rolę matematyki w życiu. Oczywiście można by podać inne, dużo ważniejsze modele matematyczne, ale uwzględniłam, że mamy maj i należy w odmienny sposób przedstawić matematykę.

Krystyna Nowicka
Studium Nauczania Matematyki

PS. Ogromną liczbę przykładów modelowania matematycznego (ważnych dla życia) można znaleźć w książce Urszuli Foryś „Matematyka w biologii” czy J. D. Murraya „Wprowadzenie do biomatematyki”.

Z teki poezji

Pory miłości

U wrót, gdy znajdą się miłości,
Wpatrzeni w siebie i nieśmiali,
Kiełkują w oczach dwie radości,
A płomień szczęścia serce pali.

Gdy wrót rozdzielą się ramiona,
Miłość zaczyna pachnieć wiosną.
Rozkwita on – rozkwita ona,
Nadzieje na wytrwałość rosną.

We włosy słońce złoto wplata,
Gorące serca grzeją ciała,
Miłość się doczekała lata.
Jest poważniejsza i dojrzała.

Splecione ręce – piękne twarze,
W parku szukają klonów cieni.
Bogaci w życia stos wydarzeń,
Złotobrązowi – od jesieni.

I znów się w myślach wiosna budzi,
Bo piękna miłość w duszach żyje,
Na zawsze zakochanych ludzi.
Co serce jeszcze w sobie kryje?

Marek Bruno Biedrzycki
Emerytowany pracownik PG

Fot. Krzysztof Krzempek