

Kącik matematyczny



W numerze grudniowym „Pisma PG” (z ubiegłego roku) ukazał się ciekawy artykuł o fraktalach. Ale jak to zwykle bywa, o tej samej rzeczy można mówić na różne sposoby. Wszystko zależy od naszego postrzegania. Przypomniało mi to opowiastkę, w której 3 ślepców miało opisać słonia. Jeden dotknął nogi i powiedział, że słon przypomina drzewo. Drugi dotknął trąby i orzekł, że słon przypomina węża. Trzeci dotknął ucha i uznał, że słon przypomina nietoperza.

Tak też jest z fraktalami, jak i samą matematyką. Dlatego też postanowiłam przedstawić inne spojrzenie na fraktale.

Ach te fraktale, ach ta matematyka

„Na początku było słowo – boski wzór, a z niego Bóg utkał niebo i ziemię, rośliny i zwierzęta. Potem przyszedł Mandelbrot i nazwał ten zbiór fraktalami.”

(J. Szymczak „Wiedza i Życie” 2002)

Próby zrozumienia świata i zjawisk w nim występujących trwają od zarania ludzkości. Ogromną rolę odgrywa tu matematyka. Banalność tego stwierdzenia przysłania pewien subtelny problem filozoficzny. Dlaczego matematyka tak dobrze sprawdza się w swojej roli użytkowej? Czyżby natura przestrzegała reguł matematyki?

Fakt ten jest ciągle potwierdzany przez wyniki wielu prac naukowych. Dość często zaskakuje ta matematyczność, a w szczególności geometryczność świata. Przykładem jej są właśnie fraktale.

Matematyka klasyczna badała linie, powierzchnie, bryły dostatecznie regularne. Są nimi na przykład kwadrat, okrąg, hiperbola, sześciąt, stożek, kula itp. Służyły one w miarę długo do interpretacji świata rzeczywistego. Nastąpiła jednak konieczność opisu i analizy nieregularności wielu zjawisk przyrody. Należało więc rozważyć inne kształty niż tradycyjne. Z pomocą przyszła teoria, jaką stworzył Benoit B. Mandelbrot, a dotycząca fraktali.

Głównym dziełem B. Mandelbrota jest wydana w 1982 roku książka „The Fractal Geometry of Nature” (Fraktalna geometria przyrody). Odegrała ona bardzo ważną rolę w zastosowaniach.

Fraktal – pojęcie stworzone przez B. Mandelbrota w 1975 roku do nazwania konstrukcji mających kształt połamany. Słowo to pochodzi od łacińskiego słowa „fractus”, co można tłumaczyć „podzielony” lub „połamany”. Nie jest łatwo określić jednoznacznie, co to są fraktale. Można jednak wyróżnić pewne istotne własności, które ich dotyczą. Są to: samopodobieństwo, wymiar fraktalny i procedura iteracyjna.

Samopodobieństwo, mówiąc bardzo ogólnie, polega na tym, że część fraktala ma budowę przypominającą całość. Na przykład gałązka kalafiora jest zbudowana tak samo, jak cały kalafior. Podobnie jest z paprocią.

Dla większości krzywych klasycznych, wzór jest dobrym sposobem ich opisu. Natomiast dla fraktali lepszą, a często jedyną metodą jest podanie przepisu na jej konstrukcję. Ma ona często właśnie postać procedury iteracyjnej.

Dokładne zrozumienie mechanizmów powstawania fraktali i ich własności wymaga solidnej wiedzy z matematyki. Dlate-

go nie będę ich tu przedstawiała z punktu widzenia teorii matematycznych. Chcę tylko zwrócić uwagę na ich rolę użytkową w opisie rzeczywistości, a między innymi w przyrodzie, na giełdzie i w informatyce.

Fraktale w przyrodzie

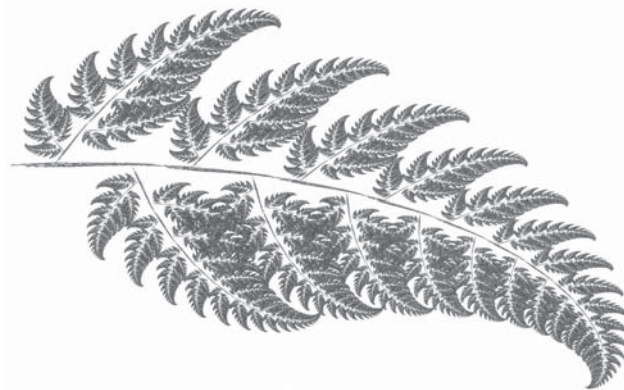
Obserwując przyrodę i chcąc ją opisać, często dokonujemy znacznych uproszczeń. Wiele jej form sprowadzamy do brył prostych. Tak jak na obrazkach dzieci, świat pojawia się jako kombinacja klasycznych kształtów geometrycznych. Na przykład dom to kwadrat, słońce – koło, chmura – elipsa, góra – stożek itp. Taki jest prosty świat dziecka, jak i człowieka w dawnych czasach.

Jednak gdy wzrasta nasza wiedza, jesteśmy świadomi, że chmura, grań górską, paproć czy kalafior mają złożoną i poszarpaną budowę. Dlatego chcąc opisać ich kształty i własności, potrzebujemy innych modeli. Dostarcza ich właśnie teoria fraktali.

Klasycznym przykładem fraktali jest linia brzegowa Wysp Brytyjskich, czy płatek śniegu. Sądzę, że każdy z nas mógłby odkryć budowę fraktalną w otaczającym nas świecie.

Naukowcy pracujący w wielu dziedzinach doświadczalnych dość szybko zorientowali się, jak pomocna może być teoria fraktali. Dzięki niej zostało wyjaśnionych wiele procesów, dla których brakowało wcześniej teoretycznego i ilościowego podejścia. Przykładem jest opis mechanizmu przeciskania się ropy naftowej przez porowate skały.

Fraktalną budowę spotyka się również w świecie żywym. Ma ją układ krwionośny, moczowy oraz płuca. Także



Liść paproci – atraktor przykładowego układu IFSP (źródło rys.: J. Kudrewicz „Fraktale i chaos”)

powierzchnia białka, np. hemoglobiny, która przenosi tlen we krwi, jest fraktalem.

Zagadnieniem przepływu krwi w płucach, w którym zastosowano analizę fraktalną, zajęli się R. Glenning i H. Robertson („Fractals modeling of pulmonary blood flow heterogeneity” 1995r.). W 1994 roku S. S. Cross przedstawił przegląd geometrii fraktalnej w jakościowej mikroskopii („The application of fractal geometric analysis microscopic image”, Micron 1994 r.). Prac poświęconych tej tematyce zaczęło pojawiać się coraz więcej. Oczywiście jest, że jest to delikatna materia i należy zachować daleko idącą ostrożność.

Przykłady fraktali pojawiają się jednak coraz częściej i więcej. Fraktale są po prostu w przyrodzie. Są geometrią natury.

Fraktale na giełdzie

„Geometria opisująca kształt linii brzegowych i rozmieszczenie galaktyk we Wszechświecie pomaga wyjaśnić nieoczekiwane spadki i wyższe notowań giełdowych.”

(B. Mandelbrot)

Obiekty o własnościach fraktali opisują nie tylko świat przyrody, ale również zmienność notowań papierów wartościowych. Zagadnieniem tym zajął się B. Mandelbrot w dalszej swojej pracy badawczej („Fractals and scaling in finance: discontinuity, concentration, risk” Springer-Verlag 1997 r.).

Notowania na wszelkich rynkach finansowych zmieniają się w dość szybkim tempie. Klasyczne modele, takie jak tzw. teoria portfela, nie przewiduje zbyt gwałtownych zmian. Kryjące się za tą teorią wzory opierają się na daleko idących założeniach. Konsekwencją tych założeń jest częste powstawanie rozbieżności między przewidywaniami tej teorii a rzeczywistością.

Wykresy notowań giełdowych lub kursów walut ukazujących wahania cen nie mają charakteru jednorodnego. Co pewien czas strzela nieoczekiwanie w górę lub w dół „iglica”. Dlatego też lepiej tłumaczy to model oparty na geometrii fraktalnej. Daje on bliższy rzeczywistości obraz zagrożeń rynkowych. Ponadto, własność fraktali, że część stanowi kopię całości, jest potwierdzana przez praktykę giełdową. Obraz graficzny wahań papierów wartościowych czy walut wygląda podobnie dla małej, jak i większej części wykresu. Pozwala to zaliczyć badane wykresy do kategorii krzywych fraktalnych. W związku z tym można zastosować pewne narzędzie matematyczne i numeryczne.

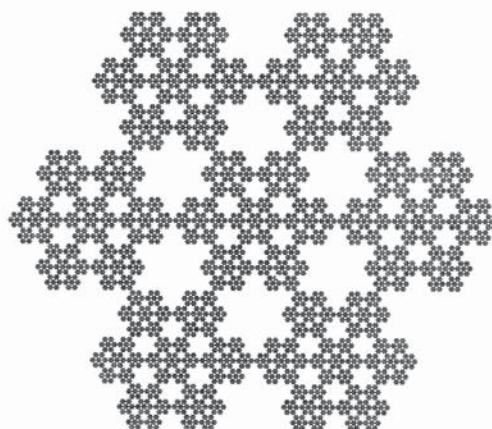
Geometria fraktalna daje model na tyle ogólny, że można go zastosować do opisu zarówno rynków stabilnych (które przewiduje teoria portfela), jak i gorączki giełdowej.

Metodę modelowania za pomocą fraktali B. Mandelbrot zmodyfikował, wprowadzając w swoich pracach pojęcie multifraktali. Mają one w lepszy sposób uwzględniać intensywność zmienności, jak i wahanie cen na rynkach giełdowych.

Oczywiście techniki fraktalne nie przybliżają nas do prognozowania na konkretny dzień spadku lub wzrostu cen. Pozwalają jednak oszacować prawdopodobieństwo określonych zachowań rynku i przygotować się do nieuchronnych zmian giełdowych. Te nowe techniki stanowią drogowskazy ułatwiające poruszanie się po bardzo trudnym terenie rynków finansowych.

Fraktale w informatyce

W praktyce do wytwarzania fraktali używa się komputerów. Dlatego jednym z najwcześniejszych „zastosowań” fraktali stała się grafika komputerowa. Algorytmy generowania fraktali



Śnieżynka – atraktor przykładowego układu IFSP (źródło rys.: J. Kędrewicz „Fraktale i chaos”)

można wykorzystywać do:

- a) kodowania, jak i analizy obrazów,
- b) sztucznego tworzenia światów wirtualnych do złudzenia przypominających rzeczywiste,
- c) tworzenia całych animacji.

Techniki fraktalne są wykorzystane tak w filmach science-fiction czy fantasy, jak i innego rodzaju. Opląca się bowiem zburzyć sztuczną górę (istniejącą tylko w pamięci komputera) lub zasymulować z takiej góry sztuczną lawinę, niż zrobić to w rzeczywistości.

Temat fraktali w informatyce jest oczywiście obszerny i nie ma tu miejsca na szersze jego omówienie. Chcę tylko zasygnalizować ich istnienie. Fraktale i komputery stanowią dobrane małżeństwo.

Na zakończenie chciałabym jeszcze raz podkreślić niezwykłą geometryczność świata. Ostatnio przeczytałam, że mikroświat też lubi geometrię. Atomy w pewnych warunkach samoczynnie tworzą złożone formy geometryczne. No cóż, matka natura po prostu lubi geometrię.

Przyda się jednak może i anegdota. Mówi ona, że nadmierna „uczoność” pewnych analiz nikomu nie jest potrzebna, a czasami bywa śmieszna. A oto ona: „Pewien farmer zaprosił zespół naukowców, aby pomogli mu w ulepszeniu produkcji mleka. Po sześciu miesiącach ich pracy powstał raport. Farmer zaczął go czytać i od razu natknął się na zdanie „Rozważmy sferyczną krowę...”. Niestety, dalsze analizy uwzględniały to założenie. Tyle mówi anegdota.

Oczywiście fraktalna krowa nie jest bardziej realistyczna. Nie wszędzie jednak należy posługiwać się fraktalami.

W moich rozważaniach nie poruszyłam ich bardzo ważnej roli w teorii chaosu (ach, te śliczne atraktory). Jest to jednak temat zbyt obszerny i wymagający dużej wiedzy matematycznej.

Tym niemniej, mam nadzieję, że udało mi się choć troszeczkę zwrócić uwagę na te niezwykle twory geometryczne, zwane fraktalami.

Krystyna Nowicka
Studium Nauczania Matematyki

P.S. Ciekawą cechą fraktali jest też ich niezwykła uroda. Kto wie, czy nie należałoby ich bardziej upowszechnić w sztuce czy projektowaniu mody.