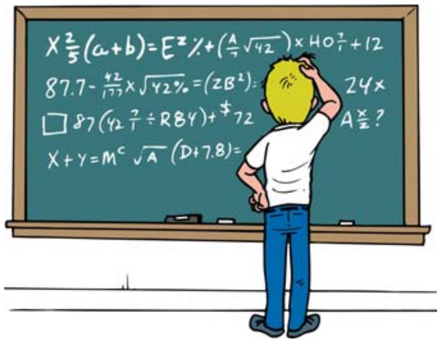


Kącik matematyczny

Dla większości osób niezajmujących się matematyką, matematyka z czasów szkolnych rzadko jawi się jako opis rzeczywistości. Wiedza o niej ogranicza się najczęściej do działań arytmetycznych (dodawania, mnożenia). Wzory, których uczono w szkole (na deltę, objętość stożka czy zależności trygonometryczne), ulatują z pamięci szybciej niż cykl rozwojowy komara. Tyle że z komarem możemy się spotkać, a z deltą nie.

Matematyka jednak to nie znajomość wzorów, to umiejętność ich poszukiwania, to zdolność postrzegania w pracy umysłowej formalnych reguł. Dlatego skuteczność matematyki tak zadziwia. Chcąc pokazać choć troszeczkę użyteczności matematyki w życiu i nie zanudzić Czytelników, podam tylko dwa przykłady stosowalności matematyki (omijając wzory na tyle, na ile jest to możliwe). Mając na uwadze, że listopad jest miesiącem szczególnym, przykłady będą miały jego klimat. Pogoda i święta w tym miesiącu stwarzają nastrój pełen melancholii i zadumy. Dlatego chyba częściej zastanawiamy się nad sprawami życiowymi. Może więc i podane przykłady skłonią do refleksji.

O niezwykłej użyteczności logarytmu naturalnego

Wszechświat to wielka księga, której nie możemy zrozumieć, dopóki nie pojmiemy języka i nie nauczymy się czytać liter składających się na ten język. Jest zaś ona napisana w języku matematyki.

Galileusz

Każdy z nas zna ze szkoły zadania tekstowe. Są one prostymi ćwiczeniami z zakresu matematyki stosowanej. Nie wymagały one jednak użycia zaawansowanego aparatu analizy matematycznej. Natomiast chcąc opisać prawidłowość pewnych zjawisk w czasie i przestrzeni, musimy sięgnąć do poważniejszej wiedzy matematycznej.

Prawa przyrody są formułowane za pomocą pewnych równań. Wiążą one nie tyle podstawowe wielkości, którymi się interesujemy, lecz szybkość, z jaką wielkości te zmieniają się w czasie. Ponieważ szybkość zmiany dotyczy różnicy między rozważaną wielkością teraz a tą wielkością w chwilę później, prowadzi to do równań zwanych równaniami różniczkowymi. Tu zaś dość często spotyka się tzw. równania rzędu wykładniczego. Rozwiązania ich są związane z dwiema funkcjami: wykładniczą $\mathbf{e^x}$ i logarytmiczną **lnx**, zwaną logarytmem naturalnym. Ciągle zadziwia mnie występowanie w przyrodzie liczby Eulera ($e \approx 2{,}71$), a stąd funkcji $\mathbf{e^x}$ i trwającej z nią w nierozerwalnym związku funkcji **lnx** ($\ln x = a \Longleftrightarrow x = e^a$). I o niej będzie moja opowieść. Zatem do dzieła.

Przykład 1

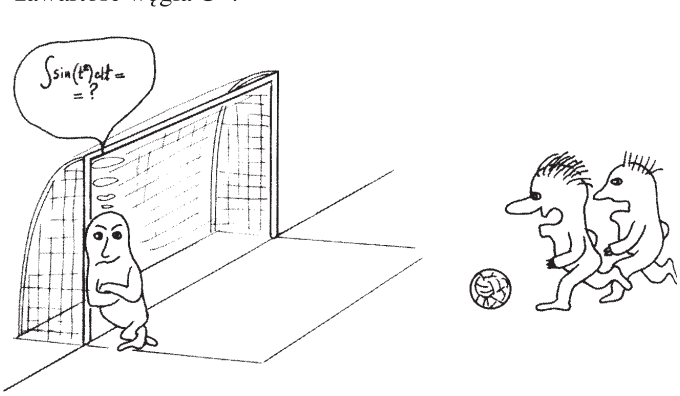
(użyteczność logarytmu naturalnego w archeologii)

Jak wyznaczyć „absolutny” wiek wykopanych kości, kawałka obrobionego drewna czy odkrytej czaszki (p. jeden z odcinków serialu kryminalnego „Wzór”)? W jaki sposób archeolog może określić czas, z którego pochodzi dane znalezisko? Taka informacja wydaje się nieosiągalna i stracona. Ale tak nie jest. Z pomocą przychodzą chemia i matematyka.

Chemik Willard Libby (Nagroda Nobla w 1960 r.) i jego współpracownicy dokonali wielkiego odkrycia nazwanego datowaniem węglem. Węgiel występuje w trzech odmianach: C^{12}, C^{13} i C^{14}. Ważna jest odmiana C^{14} – rzadka i „ulotna”. Jest to izotop radioaktywny, z czasem połowicznego rozpadu około 5568 lat. Znajdujący się w biosferze węgiel C^{14} pochodzi z jej górnych warstw, gdzie pod wpływem promieniowania kosmicznego powstaje z azotu. Następnie reaguje z tlenem i powstaje radioaktywny dwutlenek węgla. Część węgla C^{14} przedostaje się ostatecznie na powierzchnię ziemi i współtworzy środowisko żywych organizmów. Jeśli rośliny żyją na koszt dwutlenku węgla, to wszystkie one będą zawierały pewną ilość węgla radioaktywnego, i jeżeli zwierzęta żyją kosztem roślin, to też będą go miały. Jest to tzw. łańcuch pokarmowy.

W konsekwencji węgiel radioaktywny jest obecny w buraczkach, które jemy na obiad, w pelargonii na balkonie, w twoim chomiku i w prezydencie USA.

Gdy organizmy „krzątają się”, podtrzymując życie, uzupełniają w sposób ciągły utracony węgiel C^{14}, a tym samym utrzymuje się dość stała równowaga w proporcji węgla. Natomiast gdy organizm umiera, zapas węgla przestaje być uzupełniany. Tylko węgiel znajdujący się w chwili śmierci organizmu może pozostać w tkankach na stałe. No a dalej wraz z czasem ubywa go, bo po prostu węgiel radioaktywny podlega rozpadowi promieniotwórczemu. Te zaniki węgla C^{14} zaczynają się w momencie śmierci i trwają przez wieki, aż do dnia, gdy części organizmu (kości, czaszka) zostaną wykopane. Wówczas chemicy, wykorzystując aparaturę specjalistyczną, mogą określić zawartość węgla C^{14}.



O matematyce można myśleć w dowolnym miejscu i o dowolnej porze

W fizyce zakłada się, że rozpadem atomów promieniotwórczych rządzą tzw. prawa przyrostowe, co w konsekwencji prowadzi do odpowiednich równań różniczkowych. I tu wkracza matematyka, rozwiązując je.

W wyniku tej działalności, otrzymujemy zależność:

$A_s = A_0 \cdot e^{-\lambda t}$,

gdzie:

λ=0,693/5568,

A_s – aktualny poziom radioaktywności wykopaliska,

A_0 – poziom radioaktywności aktualnie żyjącego obiektu tego samego rodzaju,

t – czas, który minął od śmierci badanego reliktu.

Przypuśćmy, że archeolodzy wykopali fragment drewnianego poszycia statku. Analizy chemiczne drewna pozwoliły określić aktualny poziom radioaktywności na $A_s=9,7$ rozpadów na minutę na gram węgla. Świeżo ścięte drzewo tego samego rodzaju wykazuje poziom radioaktywności $A_0=15,3$ rozpadów na minutę na gram węgla. Celem jest wyznaczenie **t**, tj. wieku wykopanego kawałka statku. Podstawiając dane wartości A_s, A_0 do podanego wzoru, otrzymamy $9,7=15,3e^{-\lambda t}$ ($\lambda=0,693/5568$), a stąd $e^{\lambda t}=15,3/9,7$, co daje $e^{\lambda t}=1,577$.

Z zależności tej należy wyznaczyć **t**, a to wymaga logarytmu naturalnego. Wówczas mamy $\lambda t=\ln(1,577)$. Wartość $\ln(1,577)$ wyliczamy np. z użyciem kalkulatora, co daje $\ln(1,577)=0,457$.

Ostatecznie $t=5568 \cdot 0,456/0,693$, a stąd $t=3663,8$ lat.

Wyliczenia te pozwalają stwierdzić, że statek został zbudowany 3664 lata temu. Oczywiście jest to pewne przybliżenie, jednak gdy przyjmiemy, że było to 3700 lat temu, będzie to informacja dość wiarygodna.

Łącząc wiedzę o drewnie, węglu i logarytmach, odkryliśmy sekret starożytności.

Tak oto dzięki chemii i matematyce, przeszłość stała się bliższa.

Przykład 2

(opowieść z mrocznego świata zbrodni i kary)

W ciemną, deszczową noc wezwano o północy policję do mrożącej w żyłach krew zbrodni. W pobliskim parku znaleziono ciało Grubego Rycha, notorycznego kryminalisty. Znany on był z rozległych powiązań ze światem przestępczym.

Przybyły oficer śledczy zanotował, że temperatura powietrza wynosiła 20°C, zaś ciała 29,4°C. O godzinie drugiej po północy, gdy zdjęto już wszystkie możliwe odciski i przesłuchano świadków, ciało miało temperaturę 23,3°C. Na podstawie zebranych informacji, policja aresztowała Frankę, dziewczynę Grubego Rycha. Franka spędziła wieczór w barze „Pod Upadłym Aniołem". Piła zbyt dużo i ciągle groziła Grubemu Rychowi. Z baru wypadła pół godziny przed północą w bardzo paskudnym nastroju. Wydawało się wszystkim oczywiste, że to ona zabiła Grubego Rycha.

Na szczęście Franka za dawnych, dobrych czasów chodziła do elitarnej szkoły, gdzie uczono logarytmów naturalnych. Znała też prawo Newtona, dotyczące oziębiania się ciał. Mówi ono, że szybkość ochładzania się ciała jest proporcjonalna do różnic pomiędzy temperaturą stygnącego obiektu i temperaturą otoczenia. W języku potocznym znaczy to, że jeżeli jakiś obiekt jest dużo cieplejszy od otaczającego powietrza, to szybkość stygnięcia jest duża i temperatura szybko spada. Natomiast jeżeli ta różnica jest niewielka, obiekt stygnie wolniej.

Żywy człowiek nie stygnie, bo przemiana materii utrzymuje temperaturę ciała powiedzmy w okolicy 37°C. W ciele martwego człowieka nie zachodzi przemiana materii i dlatego ciało traci temperaturę. W celu więc przedstawienia powyższego opisu w postaci zwięzłej formuły matematycznej i dokonania obliczeń, Franka skorzystała tak z fizyki, jak i z matematyki. Ponieważ mowa jest o szybkości zmian, to zasada wyrównywania temperatur daje odpowiednie równanie różniczkowe. Rozwiązanie zaś tego równania wyraża się formułą:

$T(t) = 20^{o}+9,4^{o} \cdot e^{-\lambda t}$,

gdzie:

$\lambda=0,5207$,

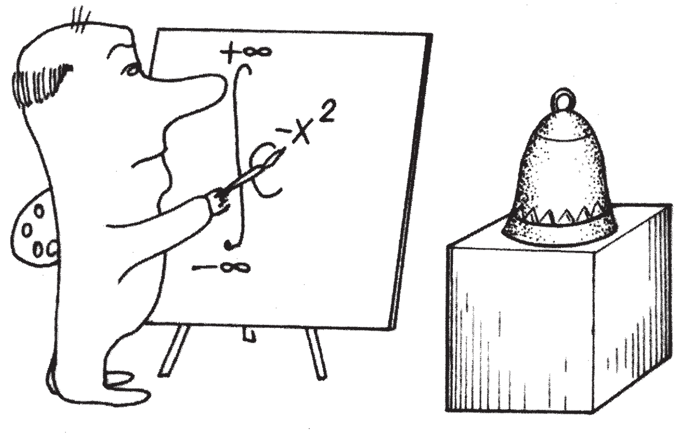
T(t) – temperatura ciała **t** godzin po północy.

Istotnym wyzwaniem dla Franki było określenie, kiedy Gruby Rycho wyzionął ducha. W tym celu musiała jakoś wykorzystać wzór, obliczając czas t, w którym temperatura ciała Grubego Rycha wynosiła jeszcze 37°C. Od tego momentu ciało stopniowo traciło ciepłotę. Pisząc równość $37^{o}=20^{o}+9,4^{o} \cdot e^{-\lambda t}$, otrzymała $e^{\lambda t}=0,5555$. Następnie chcąc wyliczyć **t**, musiała użyć logarytmu naturalnego. Okazało się, że temperatura ciała Grubego Rycha wynosiła w chwili $t=1/\lambda \ \ln(0,5555)$ ($\lambda=0,5207$), co daje $t=-1,13$ godz. W tym przypadku **t** (które oznacza liczbę godzin po północy) jest ujemne. Interpretacja tego wyniku jest prosta. Ciało miało temperaturę 37° na 1,13 godz. przed północą. Można więc przyjąć, że Gruby Rycho zaczął stygnąć około 60 minut przed północą. To ustala z grubsza czas jego śmierci na 23.00. Jednak wtedy widziano Frankę pijącą alkohol w barze. Miała więc żelazne alibi.

Podczas procesu adwokat Franki przedstawił powyższy wywód matematyczny. Nazwał go dowodem z praw natury i logarytmu naturalnego i uzyskał uniewinnienie. Tak oto dzięki logarytmowi naturalnemu zwyciężyła sprawiedliwość. Tym też akcentem chciałabym skończyć tę niezwykłą opowieść. Podobnych przykładów użyteczności logarytmu naturalnego można podać dużo, dużo więcej. Mam jednak nadzieję, że chociaż te dwa zwrócą na siebie uwagę, a tym samym na matematykę.

Krystyna Nowicka
Studium Nauczania Matematyki

Rys. z: K. Ciesielski, Z. Pogoda, „Bezmiar matematycznej wyobraźni"



Och, ta matematyka stosowana