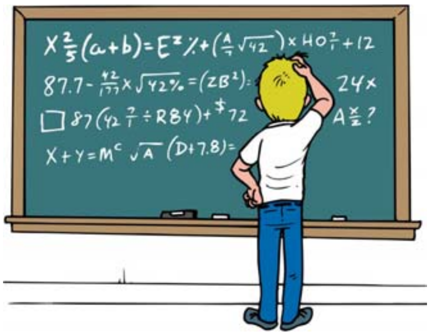

Kącik matematyczny

Drodzy czytelnicy „Pisma PG". Najwyższy czas, aby wprowadzić tutaj ducha matematyki. Moje (i nie tylko) artykuły będą skierowane do większości czytelników tego pisma. Nie będzie więc zadań do rozwiązania czy omawiania szczególnych teorii matematycznych. Chcę natomiast zwrócić uwagę na wiele spraw związanych z matematyką, a szczególnie z jej nauczaniem. Do przedstawienia moich poglądów skłania mnie fakt długoletniego nauczania matematyki oraz to, że matematyka jest moją pasją.

Dlaczego musimy dowodzić twierdzeń na wykładach z matematyki?

„Matematyka to nie tylko wzory i równania,
ale logiczne myślenie wykorzystujące umysł
do rozwiązywania zagadnień świata."
(serial kryminalny *„Wzór"*)

Pytanie tytułowe pojawiło się u mnie wraz z powstaniem tzw. „matematyki prawd objawionych", czyli całkowitego wyeliminowania dowodów twierdzeń. Przypomniało mi ono inne pytanie, jakie swego czasu zadał Stanisław Tym w tygodniku „Wprost", a mianowicie: „Dlaczego musimy uczyć się w szkole o przekroju skrzelowo-gębowym pratchawca?" Tam też dał odpowiedź: „Nie ma szczególnego powodu, aby uczyć się o nim, ale powtarzając za Duhamelem – bogaty jest człowiek, dla którego świat jest nieustannym odkrywaniem. Świat jest interesujący w każdym czasie, w każdym miejscu i we wszystkich swych przejawach. Całego świata nikt nikogo nie nauczy, bo go nie zna. Można jednak uczyć wrażliwości na świat i jego ciekawości. Można wykształcić potrzebę wiedzy o nim i umiejętność korzystania z niego. Ucząc się więc o pratchawcu, uczymy się nie tylko o nim, ale uczymy się o świecie".

Sądzę, że tak samo ucząc się dowodów twierdzeń, wytwarzamy w sobie potrzebę poznania świata. Wymagają one bowiem odpowiedzi na wiele pytań, takich jak: skąd to?, dlaczego tak? czy nie można inaczej? jak to można wykorzystać i co dalej? Krótko mówiąc, ucząc się dowodzenia twierdzeń, uczymy się myśleć. Jest to zaś właściwość potrzebna każdemu człowiekowi, tak w poznawaniu świata, jak i w życiu codziennym.

Chcąc jednak przybliżyć i uzasadnić mój pogląd na ten temat, podam kilka uwag o dowodach w matematyce. Dowody wyróżniają matematykę wśród innych badań naukowych. Znaczną część teorii matematycznych stanowią twierdzenia, które wymagają dowodów weryfikujących ich prawdziwość. Istotne jest to, że udowodnione raz twierdzenie pozostaje prawdziwe w każdym czasie i w każdym miejscu. Dlatego znane ze szkoły twierdzenie Pitagorasa ma tak długą historię (ponad 2000 lat). Już Arystoteles cenił dowody i określał je jako sprawę nie tyle zewnętrznej dyskusji, ale medytacji duszy. Wobec tego dowodzenie to proces ściśle związany z funkcjonowaniem umysłu i inteligencji. Co więcej, jest to dobra „gimnastyka" dla mózgu.

Dowód jest pewnego rodzaju argumentacją wykorzystującą logikę. Nie można jednak podawać w nim uzasadnień intuicyjnych (bo tak czuję) czy argumentów zdroworozsądkowych (bo inaczej byłoby źle) lub stwierdzeń, że tak być musi bo dobrze wygląda. Można jednak wyróżnić pewne istotne zasady, którymi należy się kierować. Kilka z nich postaram się tu przedstawić i określić ich korzyść w życiu codziennym i w poznawaniu świata.

<u>Zasada 1</u> – kilka przykładów szczególnych to nie wszystko

W życiu codziennym dość często mamy skłonność do akceptowania jakiegoś poglądu jako prawdziwego na podstawie pewnej liczby przypadków potwierdzających go. W matematyce zaś podany fakt musimy zweryfikować dla wszystkich możliwych przypadków (a nie dla największej liczby). Wymóg ten wyrabia w nas wątpienie nawet w sytuacjach, gdy znaczna liczba przykładów potwierdza jakiś pogląd. Bardzo dobrze zostało to przedstawione w odcinkach serialu kryminalnego pt. „Wzór" (emitowanego w TV4 w okresie wakacji br.) Zasada ta pozwoliła rozwiązać tam wiele trudnych spraw kryminalnych. Sądzę, że jest ona niezbędna w każdej działalności naukowej, jak i w wypowiadaniu ocen.

<u>Zasada 2</u> – to co jest prostsze jest lepsze

W matematyce ceni się dowody pomysłowe, proste i krótkie, czyli tzw. „eleganckie". Pytanie czy nie można prościej, inaczej, pojawia się przy okazji niejednego dowodu. Elegancja matematyczna nie jest czymś różnym od innych elegancji twórczych (np. w poezji, malarstwie, muzyce itp.). Oj, przydałoby się jej choć trochę wielu naszym dziennikarzom oraz głoszącym publicznie swoje poglądy.

<u>Zasada 3</u> – szukajmy kontrprzykładu

Aby udowodnić prawdziwość twierdzenia, potrzeba dość często dużej ogólnej argumentacji. Natomiast do obalenia twierdzenia wystarczy tylko jeden niespełniający go przykład. Jest to tzw. kontrprzykład. Umiejętność podania kontrprzykładu przydaje się w sprawdzeniu czy podany wzór jest prawdziwy, np. czy: $(a+b)^2 = a^2+b^2$? Wystarczy tutaj przyjąć $a=1$, $b=2$, to otrzyma się po lewej stronie $a+b = 1+2 = 3$, $(a+b)^2 = 3^2 = 9$, zaś po prawej stronie $a^2 = 1$, $b^2 = 2^2 = 4$, $a^2+b^2 = 1+4 = 5$. Wobec tego $(a+b)^2 = 9 \neq 5 = a^2+b^2$. Stąd wnioskujemy, że podany wzór jest fałszywy.

Brak tego typu wiedzy powoduje, że w rozwiązywaniu zadań (w pracach pisemnych moich studentów) pojawia się wiele wzorów nieprawdziwych. Niestety, liczba ich znacznie wzrosła w ostatnich latach.

Oczywiście trzeba podkreślić też, że znalezienie kontrprzykładu nie zawsze jest łatwe. Znany jest np. fakt, że dla pewnej hipotezy Eulera z teorii liczb nie można było ani podać dowodu, ani znaleźć kontrprzykładu przez 200 lat. Nagle w 1966 r. został znaleziony kontrprzykład.

Niemniej jednak wiedza o kontrprzykładach przydaje się nie tylko w matematyce. Kto wie, czy pewne dyskusje publiczne byłyby w ogóle potrzebne...?

<u>Zasada 4</u> – zawsze możesz dowieść czegoś przeciwnego

Są sytuacje, że łatwiej czy wygodniej jest dowieść czegoś przeciwnego. Przypuśćmy, że mamy dowieść istnienia pewnego obiektu, np. wzoru czy własności (np. $\sqrt{2}$ jest liczbą niewymierną). Wówczas zakładamy, że obiekt (tj. wzór, własność) nie istnieje (tj. nie zachodzi) i poszukujemy wynikających z tego konsekwencji. Jeżeli okaże się, że przyjęte założenie nieistnienia (niezachodzenia, np. $\sqrt{2}$ nie jest liczbą niewymierną, tj. jest wymierną) prowadzi do sprzeczności, to na podstawie praw logiki wnioskujemy, że było ono błędne. Wtedy możemy sformułować bezsporny wniosek o istnieniu obiektu (tj. $\sqrt{2}$ jest liczbą niewymierną).

Jest to wspaniała taktyka logiczna (jak powiedział genialny matematyk G. H. Hardy).

I jak zwykle (a to też jest pouczające) trzeba mieć świadomość, że są zadania, gdzie nie można dowieść ani że coś istnieje, ani że nie istnieje. Bardzo zabawny przykład tego typu podał w swojej niezwykłej książce „Matematyczny wszechświat" W. Dunham. Jest to rozmowa dwóch osób, powiedzmy A i B.

A: *Czytałem na tablicy ogłoszeń w supermarkecie, że krasnoludek wygrał na loterii.*
B: *Przecież krasnoludki nie istnieją.*
A: *Co mówisz?*
B: *Mówię, że krasnoludki nie istnieją.*
A: *Jesteś pewny? Czy możesz udowodnić, że nie istnieją?*
B: *Nie... nie mogę. Jednak ty też nie możesz dowieść czegoś przeciwnego.*

No cóż, przypomniało mi to podobną dyskusję na zajęciach studenckich (przed świętami) o istnieniu św. Mikołaja. Mam jednak wrażenie, że dość często nasza prasa pełna jest informacji o „krasnoludkach", „elfach" itp. Jest to niestety manipulacja na wiedzy czytelnika.

Na tym chciałabym zakończyć omawianie zasad. Sądzę, że są one niezbędne w zdobywaniu każdej wiedzy i w poznawaniu świata. Na pewno też pobudzają nas do myślenia.

Oprócz tego standard dowodu matematycznego jest nieosiągalną normą dla innych dziedzin ludzkiej działalności. Nie należy też zapominać, co powiedział R. Bacon (teolog i filozof), że „Kto lekceważy osiągnięcia matematyki, ten przynosi szkodę całej nauce, ponieważ kto nie zna matematyki, ten nie może poznać innych nauk ścisłych i poznawać świata".

Sądzę, że z przytoczonych rozważań wynika, że powinniśmy dowodzić przynajmniej pewnych twierdzeń na wykładach z matematyki.

Na zakończenie chciałabym poruszyć jeszcze jeden problem. Jest to prawdziwość dowodów komputerowych. Na ile są one wiarygodne? Rodzi to wiele pytań, np. czy programista nie popełnił błędu? A może nastąpiło wahanie w sieci energetycznej i spowodowało przeoczenie przez komputer krytycznego miejsca? Czy można zaufać maszynie, że obdarzyła nas prawdą? Czy w sytuacji, gdzie żaden człowiek nie może sprawdzić danego dowodu, rzeczywiście jest to dowód? Rodzi to też pytanie: „czy człowiek jest potrzebny?"

Problem ten pozostawiam do przemyślenia każdemu czytelnikowi.

No i aby nie było tak „strasznie" poważnie przytoczę pewne „zabawne" określenia dowodów (patrz K. Ciesielski, Z. Pogoda, „Bezmiar matematycznej wyobraźni"). Są to:

- dowód przez ogląd („wystarczy popatrzeć"),
- dowód przez połechtanie ambicji słuchaczy („to dla Państwa jest proste"),
- dowód iluzjonistyczny („zrobimy teraz małą sztuczkę"),
- dowód teologiczny przez odwołanie się do sił nieczystych („diabli wiedzą jak to zrobić"),
- dowód przez zastraszenie („albo Państwo uwierzą na słowo, albo będę przez 3 godziny dowodził").

Jak widać, o dowodach można mówić także w ten sposób. Jest to doskonała zabawa intelektualna. Matematycy cenią szczególne poczucie humoru w różnego rodzaju grach słownych. Wymagają one bowiem pomysłowości, wyczucia absurdu i zwięzłości wypowiedzi.

Krystyna Nowicka
Wydział Fizyki Technicznej i Matematyki Stosowanej

P.S. Martwi mnie obiegowa opinia, że na uniwersytetach dowodzi się twierdzeń, a na politechnikach rozbija je młotkiem.

– Sądzę, że wyobrażacie sobie matematykę tak samo jak ja...

Rys. z: K. Ciesielski, Z. Pogoda, „Bezmiar matematycznej wyobraźni"